I Sistemi Modali S di Clarence Irving Lewis

1. Genesi Storica e Fondamenti Filosofici

1.1 Il Contesto Logico-Filosofico

Alla fine del XIX secolo, la logica matematica aveva raggiunto una maturità considerevole grazie ai lavori di Frege, Peano e Russell. La *Begriffsschrift*di Frege (1879) e i *Principia Mathematica*di Whitehead e Russell (1910-1913) avevano fornito una formalizzazione rigorosa della logica proposizionale e predicativa. Tuttavia, questa formalizzazione si basava su una concezione estensionale della logica, in cui il valore di verità di una proposizione composta dipende esclusivamente dai valori di verità delle sue componenti.Clarence Irving Lewis (1883-1964), filosofo americano formatosi ad Harvard sotto la guida di Josiah Royce, iniziò già nel 1912 a mettere in questione l'adeguatezza dell'implicazione materiale come formalizzazione del condizionale e dell'inferenza. La sua critica non era meramente tecnica, ma affondava le radici in una concezione intensionale della logica, secondo cui il significato e la connessione contenutistica tra proposizioni non possono essere ridotti a relazioni vero-funzionali.

1.2 La Critica Fondamentale: I Paradossi dell'Implicazione Materiale

L'implicazione materiale, definita nella logica classica come:

$p \rightarrow q := \neg p \vee q$

genera i seguenti teoremi, che Lewis considerava paradossali:

(P1) $\vdash p \rightarrow (q \rightarrow p)$
Una proposizione vera è implicata da qualsiasi proposizione

(P2) $\vdash \neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$
Una proposizione falsa implica qualsiasi proposizione

(P3) $\vdash (p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$
Di due proposizioni qualsiasi, almeno una implica l'altra

(P4) $\vdash (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow \neg q)$
Una proposizione implica una proposizione arbitraria o la sua negazione

Lewis osservò che questi teoremi violano la nostra comprensione intuitiva dell'inferenza logica. Quando affermiamo "se la Luna è fatta di formaggio, allora 2+2=4", la verità di questa implicazione materiale (essendo il conseguente vero) non riflette alcuna connessione logica o causale tra antecedente e conseguente. Il problema è che l'implicazione materiale è **irrilevante rispetto al contenuto**: la verità di $p \rightarrow q$ non dipende da alcuna relazione tra i significati di p e q, ma solo dai loro valori di verità.

1.3 La Soluzione di Lewis: Implicazione Stretta e Modalità

Lewis propose di sostituire l'implicazione materiale con l'**implicazione stretta**(strict implication), che incorpora un elemento modale. L'idea fondamentale è che p implica strettamente q quando è impossibile che p sia vera e q falsa, ovvero quando

necessariamente, se p allora q:

p -3 q := □(p → q) := ¬◇(p ∧ ¬q)

Questa definizione cattura l'intuizione che un'autentica implicazione richiede una connessione logica necessaria. Se "tutti gli uomini sono mortali"e "Socrate è un uomo", allora "Socrate è mortale"non è meramente vero contingentemente, ma segue necessariamente dalle premesse.L'introduzione dell'implicazione stretta richiede però l'introduzione di operatori modali nella logica. Lewis sviluppò quindi una famiglia di sistemi logici che formalizzano differenti concezioni della necessità e della possibilità. Questi sistemi, pubblicati inizialmente in *A Survey of Symbolic Logic*(1918) e poi in forma definitiva in *Symbolic Logic*(1932, con C.H. Langford), costituiscono i sistemi S1-S5.

1.4 La Natura Filosofica delle Modalità in Lewis

Per Lewis, la necessità non è primariamente metafisica, ma **logico-analitica**. Una proposizione è necessaria quando la sua verità è garantita dal significato dei suoi termini e dalle leggi della logica, indipendentemente dai fatti contingenti del mondo. Questa concezione si oppone sia al nominalismo estremo (che riduce la necessità a convenzioni linguistiche) sia al realismo modale estremo (che postula l'esistenza di mondi possibili concreti).La possibilità, correlativamente, è definita come assenza di contraddizione logica: ◇p significa che p non implica una contraddizione. Questa è una concezione **concettualista**della modalità, che la lega alla struttura del nostro sistema concettuale piuttosto che a fatti ontologici indipendenti.

2. Costruzione Assiomatica Dettagliata dei Sistemi

2.1 Preliminari: Linguaggio e Metalogica

2.1.1 Il Linguaggio Formale L_S

Definiamo il linguaggio L_S per i sistemi S:

Alfabeto:

- Un insieme numerabile di **variabili proposizionali**: Var = {p, q, r, p_1, p_2, ...}
- **Connettivi logici**:
- Negazione: ¬
- Congiunzione: ∧
- Disgiunzione: ∨
- Implicazione materiale: →

Operatore modale primitivo: ◇ (possibilità)
Simboli ausiliari: (,)

Formule ben formate (fbf): Definite induttivamente:

1. Ogni p ∈ Var è una fbf
2. Se φ è una fbf, allora ¬φ è una fbf
3. Se φ e ψ sono fbf, allora (φ ∧ ψ), (φ ∨ ψ), (φ → ψ) sono fbf
4. Se φ è una fbf, allora ◇φ è una fbf
5. Nient'altro è una fbf

Definizioni abbreviative:

- **Necessità**: $\Box\varphi := \neg\Diamond\neg\varphi$
- **Implicazione stretta**: $\varphi \text{ -3 } \psi := \Box(\varphi \rightarrow \psi)$
- **Biimplicazione materiale**: $\varphi \leftrightarrow \psi := (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$
- **Equivalenza stretta**: $\varphi \Longleftrightarrow \psi := (\varphi \text{ -3 } \psi) \wedge (\psi \text{ -3 } \varphi)$
- **Possibilità stretta**: $\hat{\Diamond}\ \varphi := \neg\Box\neg\varphi$ (identica a $\Diamond\varphi$, ma sottolinea il ruolo intensionale)

2.1.2 Nozioni Metalogiche Fondamentali

Derivazione: Una derivazione (o dimostrazione) in un sistema S è una sequenza finita di formule $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n$ tale che ogni φ_i è:

- un assioma di S, oppure
- ottenuta da formule precedenti mediante l'applicazione di una regola di inferenza di S

Teorema: Una formula φ è un teorema di S (notazione: $\vdash_S \varphi$) se esiste una derivazione in S che termina con φ.

Consistenza: Un insieme Γ di formule è S-consistente se non esiste una formula φ tale che sia $\vdash_S (\wedge\Gamma) \rightarrow \varphi$ che $\vdash_S (\wedge\Gamma) \rightarrow \neg\varphi$. Un sistema S è consistente se non ogni formula è un teorema.

Completezza sintattica: Un insieme massimale S-consistente Γ è tale che per ogni formula φ, o $\varphi \in \Gamma$ o $\neg\varphi \in \Gamma$.

Completezza semantica: Un sistema S è (semanticamente) completo rispetto a una classe di modelli M se ogni formula valida in tutti i modelli di M è un teorema di S.

2.2 Sistema S1: La Base Minimale

Il sistema S1, introdotto da Lewis nel 1912 e raffinato nel 1918, rappresenta il sistema modale più debole che incorpora l'implicazione stretta. Lewis voleva un sistema che:

1. Contenesse tutta la logica proposizionale classica
2. Permettesse di definire l'implicazione stretta
3. Fosse minimale nelle sue assunzioni sulla natura della necessità

2.2.1 Assiomi di S1

Lewis presentò S1 con 19 assiomi, qui organizzati per chiarezza concettuale:

Gruppo A: Base Proposizionale Classica

Gli assiomi A1-A10 costituiscono un sistema assiomatico completo per la logica proposizionale classica:

- **(A1)**$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
  Una proposizione vera è implicata materialmente da qualsiasi proposizione
- **(A2)**$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$
  Assioma di distributività dell'implicazione, schema di Frege
- **(A3)**$(p \wedge q) \rightarrow p$
  Eliminazione della congiunzione, primo congiunto

- **(A4)**$(p \wedge q) \rightarrow q$
  Eliminazione della congiunzione, secondo congiunto
- **(A5)**$p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q))$
  Introduzione della congiunzione
- **(A6)**$p \rightarrow (p \vee q)$
  Introduzione della disgiunzione, prima alternativa
- **(A7)**$q \rightarrow (p \vee q)$
  Introduzione della disgiunzione, seconda alternativa
- **(A8)**$(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r))$
  Eliminazione della disgiunzione
- **(A9)**$(p \rightarrow \neg q) \rightarrow (q \rightarrow \neg p)$
  Contrapposizione per la negazione
- **(A10)**$\neg\neg p \rightarrow p$
  Eliminazione della doppia negazione

Gruppo B: Assiomi per la Necessità e la Possibilità

- **(A11)**$\Box(p \wedge q) \Leftrightarrow (\Box p \wedge \Box q)$
  La necessità si distribuisce sulla congiunzione (in entrambe le direzioni)

Questo assioma stabilisce che è necessario che p e q se e solo se è necessario p ed è necessario q. Formalmente:

$\Box(p \wedge q) \rightarrow (\Box p \wedge \Box q)$ e $(\Box p \wedge \Box q) \rightarrow \Box(p \wedge q)$

La prima direzione ($\rightarrow$) esprime che la necessità della congiunzione implica la necessità di ciascun congiunto. La seconda direzione ($\leftarrow$) è più sostanziale: afferma che se ciascuna proposizione è necessaria individualmente, allora la loro congiunzione è necessaria. Questo è un principio di **monotonia della necessità**rispetto alla congiunzione.

- **(A12)**$\Box p \rightarrow p$
  Se una proposizione è necessaria, allora è vera (Assioma T)

Questo è forse l'assioma modale più fondamentale e intuitivo. Afferma che la necessità implica la verità: se qualcosa è necessariamente il caso, allora è effettivamente il caso. Questo distingue i sistemi modali "normali"da quelli "non-normali". L'assioma T riflette una concezione **aletica**della modalità: stiamo parlando di ciò che è vero in senso necessario, non di ciò che è meramente creduto, desiderato o obbligatorio.Filosoficamente, A12 esclude la possibilità di necessità "inconsistenti con la realtà". Non possiamo avere $\Box p$ vero e p falso nello stesso mondo. Questo assume implicitamente che stiamo valutando le modalità rispetto al mondo attuale, che è uno dei mondi possibili.

Gruppo C: Assiomi per l'Implicazione Stretta

- **(A13)**$(p \text{ -3 } q) \rightarrow (\neg q \text{ -3 } \neg p)$
  Contrapposizione per l'implicazione stretta

Se p implica strettamente q, allora ¬q implica strettamente ¬p. Questo è l'analogo modale della contrapposizione classica, ma qui la relazione è preservata in tutti i mondi possibili.

- **(A14)**$((p \text{ -3 } q) \wedge (q \text{ -3 } r)) \rightarrow (p \text{ -3 } r)$
  Transitività dell'implicazione stretta

L'implicazione stretta è transitiva: se p implica strettamente q e q implica strettamente r, allora p implica strettamente r. Questo è fondamentale per la chiusura deduttiva: le catene di inferenze valide producono inferenze valide.

- **(A15)**p -3 (p ∧ p)
  Idempotenza sotto implicazione stretta

Ogni proposizione implica strettamente la sua congiunzione con se stessa. Questo riflette il fatto che p e p∧p hanno lo stesso contenuto informativo.

- **(A16)**(p ∧ q) -3 p
  Semplificazione stretta

La congiunzione implica strettamente ciascun congiunto. Questo è l'analogo stretto di A3.

- **(A17)**((p -3 q) ∧ (p -3 r)) ⟺ (p -3 (q ∧ r))
  Distribuzione dell'implicazione stretta sulla congiunzione nel conseguente

Se p implica strettamente sia q che r, allora p implica strettamente q∧r, e viceversa.

- **(A18)**(p ∧ q) -3 (q ∧ p)
  Commutatività della congiunzione sotto implicazione stretta
- **(A19)**((p -3 r) ∧ (q -3 s)) → ((p ∧ q) -3 (r ∧ s))
  Monotonia dell'implicazione stretta rispetto alla congiunzione

2.2.2 Regole di Inferenza di S1

Le regole di inferenza specificano come derivare nuovi teoremi da teoremi già stabiliti:

(R1) Modus Ponens (MP):

α, α → β

β

Se α è un teorema e α → β è un teorema, allora β è un teorema. Questa è la regola fondamentale di inferenza della logica classica.

(R2) Adjunzione (Adj):

α, β

α ∧ β

Se α è un teorema e β è un teorema, allora α ∧ β è un teorema.

(R3) Regola di Necessitazione (RN o Nec):

α

□α

Se α è un teorema, allora □α è un teorema. Questa regola è cruciale e richiede un'attenta interpretazione. **Non**afferma che se α è vero, allora □α è vero (questo sarebbe un principio modale molto forte e generalmente falso). Afferma invece che i **teoremi logici**sono necessariamente veri. Se α è dimostrabile puramente dalla logica, senza assumere alcuna premessa contingente, allora α è vero in tutti i mondi possibili, quindi □α.

La regola di necessitazione codifica l'idea che le verità logiche sono necessarie. Questo è un principio fondamentale della concezione lewisiana della modalità.

(R4) Sostituzione Uniforme (Sub o US):

$\alpha(p_1, ..., p_n)$

$\alpha(\beta_1/p_1, ..., \beta_n/p_n)$

Se $\alpha(p_1, ..., p_n)$ è un teorema contenente le variabili proposizionali $p_1, ..., p_n$, allora il risultato di sostituire uniformemente ogni occorrenza di p_i con una formula β_i è anch'esso un teorema.

2.2.3 Teoremi Fondamentali di S1

Deriviamo alcuni teoremi importanti per illustrare la potenza deduttiva di S1:

Teorema 2.1 (Assioma K): $\vdash_{S1} \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

*Dimostrazione:*Questo teorema, chiamato assioma K nella letteratura moderna, afferma che la necessità si distribuisce sull'implicazione materiale. È derivabile in S1 da A11 e A12.

1. $\Box((p \to q) \land p) \leftrightarrow (\Box(p \to q) \land \Box p)$ [da A11, con $(p \to q)$ per p e p per q]
2. $(p \to q) \land p \to q$ [teorema della logica proposizionale]
3. $\Box((p \to q) \land p) \to \Box q$ [da 2 e A12, applicando necessitazione]
4. $(\Box(p \to q) \land \Box p) \to \Box q$ [da 1 e 3]
5. $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ [da 4, esportazione]

Teorema 2.2 (Monotonia della Necessità): Se $\vdash_{S1} \varphi \to \psi$, allora $\vdash_{S1} \Box\varphi \to \Box\psi$

Dimostrazione:

1. Assumiamo $\vdash_{S1} \varphi \to \psi$
2. $\vdash_{S1} \Box(\varphi \to \psi)$ [da 1 e RN]
3. $\vdash_{S1} \Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$ [Teorema 2.1]
4. $\vdash_{S1} \Box\varphi \to \Box\psi$ [da 2, 3 e MP]

Teorema 2.3 (Equivalenza di Definizioni per -3): $\vdash_{S1} (p \text{ -3 } q) \leftrightarrow \Box(p \to q) \leftrightarrow \neg\Diamond(p \land \neg q)$

*Dimostrazione:*Per definizione, $p \text{ -3 } q := \Box(p \to q)$. Dobbiamo mostrare $\Box(p \to q) \leftrightarrow \neg\Diamond(p \land \neg q)$.

1. $\Box(p \to q) \leftrightarrow \Box(\neg p \lor q)$ [definizione di →]
2. $\Box(\neg p \lor q) \leftrightarrow \Box\neg(p \land \neg q)$ [De Morgan]

3. $\Box\neg(p \wedge \neg q) \leftrightarrow \neg\Diamond(p \wedge \neg q)$ [definizione di $\Diamond$: $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$]

Teorema 2.4 (Paradossi dell'Implicazione Stretta):

Nonostante l'introduzione dell'implicazione stretta, alcuni "paradossi"permangono in S1:

(i) $\vdash_{S1} \neg\Diamond p \rightarrow (p \text{ -3 } q)$
Una proposizione impossibile implica strettamente qualsiasi proposizione

(ii) $\vdash_{S1} \Box q \rightarrow (p \text{ -3 } q)$
Una proposizione necessaria è strettamente implicata da qualsiasi proposizione

Dimostrazione di (i):

1. $\neg\Diamond p$ [ipotesi]
2. $\Box\neg p$ [da 1, definizione di $\Diamond$]
3. $\Box\neg p \rightarrow \Box(p \rightarrow q)$ [logica proposizionale: $\neg p \rightarrow (p \rightarrow q)$]
4. $\Box(p \rightarrow q)$ [da 2, 3 MP]
5. $p \text{ -3 } q$ [da 4, definizione]

Questi risultati mostrano che, sebbene l'implicazione stretta elimini alcuni paradossi dell'implicazione materiale, ne introduce di nuovi. Una proposizione contraddittoria (impossibile) implica strettamente qualsiasi cosa, e una tautologia (proposizione necessaria) è strettamente implicata da qualsiasi cosa.Lewis riconosceva questi "paradossi dell'implicazione stretta"ma li considerava meno problematici di quelli dell'implicazione materiale, poiché raramente ci confrontiamo con proposizioni chiaramente impossibili o necessarie nelle inferenze ordinarie.

2.2.4 Caratteristiche Metalogiche di S1

Consistenza:S1 è consistente. Questo può essere dimostrato costruendo un'interpretazione in cui non tutte le formule sono teoremi, oppure dimostrando che esiste almeno una formula non derivabile.

Decidibilità:S1 è decidibile, ma la prova è non-triviale e richiede metodi matriciali. La decidibilità significa che esiste un algoritmo effettivo per determinare se una formula arbitraria è un teorema di S1.

Incompletezza Semantica:S1 non ha una semantica semplice in termini di frame di Kripke. Servono semantiche più generali (neighborhood semantics o topological semantics) per caratterizzare completamente S1.

2.3 Sistema S2: Introduzione del Collasso Modale

Il sistema S2 aggiunge a S1 un principio di collasso per le iterazioni modali di possibilità.

2.3.1 Assioma Caratterizzante di S2

S2 = S1 + (A-S2)

(A-S2) $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$

Questo assioma afferma che se è possibile che sia possibile p, allora è (semplicemente) possibile p. In termini di necessità (usando la definizione $\Box p := \neg\Diamond\neg p$), l'assioma equivalente è:

(A-S2')$\Box p \rightarrow \Box\Box p$

Filosoficamente, A-S2 riflette una concezione della possibilità secondo cui non ci sono "gradi"o "livelli"di possibilità. Se qualcosa è possibile in un qualche senso, allora è semplicemente possibile. Non c'è distinzione tra "possibilità di secondo ordine"e "possibilità di primo ordine".

2.3.2 Conseguenze Teorematiche

Teorema 2.5 (Idempotenza delle Modalità Iterate):
In S2, per ogni $n \geq 1$:

- $\vdash_{S2} \Diamond^n p \leftrightarrow \Diamond p$
- $\vdash_{S2} \Box^n p \leftrightarrow \Box p$

dove $\Diamond^n$ denota n applicazioni successive di $\Diamond$.

Dimostrazione (per induzione su n):

Base (n=1): Triviale, $\Diamond^1 p = \Diamond p$.

Passo induttivo: Assumiamo $\Diamond^n p \leftrightarrow \Diamond p$. Vogliamo mostrare $\Diamond^{n+1} p \leftrightarrow \Diamond p$.

1. $\Diamond^{n+1} p = \Diamond(\Diamond^n p)$ [definizione]
2. $\Diamond(\Diamond^n p) \leftrightarrow \Diamond(\Diamond p)$ [ipotesi induttiva con sostituzione uniforme]
3. $\Diamond(\Diamond p) \rightarrow \Diamond p$ [A-S2]
4. $\Diamond p \rightarrow \Diamond(\Diamond p)$ [dalla monotonicità: $p \rightarrow \Diamond p$, quindi $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$]

Aspetta, il passo 4 richiede giustificazione. In effetti, non è generalmente vero che $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$ in S2 senza ulteriori assunzioni. Dobbiamo essere più attenti.

Correzione:

In realtà, per dimostrare completamente l'idempotenza, dobbiamo procedere diversamente:

Per $\Diamond$:

1. $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ [A-S2]
2. $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$ [da dimostrare]

Per (2), osserviamo che nella semantica di S2 (che discuteremo), la relazione di accessibilità ha proprietà tali che $\Diamond p$ implica $\Diamond\Diamond p$. Tuttavia, sintatticamente in S2, non possiamo derivare generalmente $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$.

La situazione corretta è:

- In S2: $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ [derivabile]
- In S4: $\Diamond p \rightarrow \Diamond\Diamond p$ diventa derivabile con assiomi aggiuntivi

Per $\Box$: Usando la dualità $\Box p = \neg\Diamond\neg p$:

1. $\Box\Box p = \neg\Diamond\neg\Box p = \neg\Diamond\neg\neg\Diamond\neg p = \neg\Diamond\Diamond\neg p$
2. $\neg\Diamond\Diamond\neg p \rightarrow \neg\Diamond\neg p$ [contrapponendo A-S2 applicato a $\neg p$]
3. $\neg\Diamond\neg p = \Box p$

Quindi $\Box\Box p \rightarrow \Box p$.

Per la direzione opposta ($\Box p \rightarrow \Box\Box p$), questo richiede l'assioma 4, che non è presente in S2 come primitivo, anche se alcune conseguenze di collasso sono derivabili.

Correzione finale: In S2, ciò che è effettivamente derivabile è:

- $\Diamond^n p \rightarrow \Diamond p$ per ogni $n \geq 1$ (collasso verso il basso)
- $\Box p \rightarrow \Box^n p$ è più delicato e non sempre derivabile in S2 senza l'assioma 4

2.3.3 Differenze tra S1 e S2

In S1, le iterazioni modali sono pienamente distinguibili. Possiamo avere situazioni dove $\Diamond\Diamond p$ è vero ma $\Diamond p$ è falso. In S2, questo è impossibile: l'assioma A-S2 forza il collasso.

Esempio di formula valida in S2 ma non in S1:

$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ [è l'assioma stesso]

Inoltre, consideriamo:

$\Box p \vee \Diamond\Box\neg p$

Questa formula (o simili) può essere usata per separare S1 da S2, nel senso che ha diversi status di derivabilità nei due sistemi.

2.4 Sistema S3: L'Assioma di Linearità

S3 introduce un assioma peculiare e meno intuitivamente motivato rispetto agli altri sistemi.

2.4.1 Assioma Caratterizzante di S3

S3 = S2 + (A-S3)

(A-S3) $\Diamond(\Box p \wedge q) \rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$

Oppure, nella formulazione originale di Lewis usando l'implicazione stretta:

(A-S3') $\Box(\Box p \rightarrow q) \vee \Box(\Box q \rightarrow p)$

Questo assioma è difficile da interpretare intuitivamente. Afferma una sorta di "linearità modale": date due proposizioni necessariamente vere, almeno una implica necessariamente l'altra in un certo senso tecnico.

2.4.2 Interpretazione e Motivazione

Lewis stesso ammise che l'assioma S3 era tecnicamente utile per certi risultati, ma filosoficamente oscuro. Non corrisponde a nessuna intuizione chiara sulla natura della modalità.

Una possibile interpretazione: l'assioma S3 impone restrizioni sulla struttura degli "spazi modali", richiedendo una sorta di connessione o comparabilità tra necessità iterate.

2.4.3 Teoremi Caratteristici

Teorema 2.6: In S3, valgono le proprietà di S2 plus ulteriori principi di interazione tra necessità iterate.

La caratterizzazione precisa di S3 è complessa. Nella pratica, S3 è meno studiato di S2, S4 e S5, precisamente a causa della sua minore chiarezza filosofica.

2.5 Sistema S4: Il Sistema della Transitività

S4 è uno dei sistemi più importanti e filosoficamente perspicui della famiglia Lewis.

2.5.1 Assioma Caratterizzante di S4

S4 = S1 + (A-T) + (A-4)

(A-T)$\Box p \rightarrow p$
[già in S1 come A12, ribadito per chiarezza]

(A-4)$\Box p \rightarrow \Box\Box p$
Se qualcosa è necessario, allora è necessariamente necessario

Equivalentemente, usando la possibilità:

(A-4')$\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$
Se qualcosa è possibilmente possibile, allora è possibile

L'assioma 4 è chiamato anche **assioma di introspezione positiva**nel contesto epistemico, o **assioma di transitività**nella semantica dei mondi possibili.

2.5.2 Giustificazione Filosofica dell'Assioma 4

L'assioma 4 riflette una concezione forte della necessità. Se p è necessariamente vero, allora questo fatto stesso (che p è necessario) è necessario. Non è contingente che p sia necessario; se p è necessario, lo è necessariamente.

Interpretazione epistemica: Se interpretiamo $\Box$ come "l'agente sa che", l'assioma 4 diventa: "Se so che p, allora so che so che p". Questo è il principio di **introspezione positiva**o **auto-consapevolezza della conoscenza**. Un agente razionale che sa qualcosa è consapevole di saperla.

Interpretazione aletica: Se $\Box$ rappresenta la necessità logica o metafisica, l'assioma 4 afferma che lo status modale di una proposizione è esso stesso necessario. Se p è una verità logica, allora è una verità logica che p è una verità logica.

Questa intuizione è controversa per la necessità metafisica (potrebbe esserci contingenza negli stati modali?), ma è plausibile per la necessità logica.

2.5.3 Teoremi Fondamentali di S4

Teorema 2.7 (Idempotenza Completa delle Modalità):
Per ogni $n \geq 1$:

- $\vdash_S4$

- $\Box^n p \leftrightarrow \Box p$
- $\vdash_{S4} \Diamond^n p \leftrightarrow \Diamond p$

Dimostrazione:

Per $\Box$:

Direzione ($\rightarrow$): $\Box^n p \rightarrow \Box p$

Per induzione su n:

- Base (n=1): Triviale
- Passo: Assumiamo $\Box^n p \rightarrow \Box p$. Consideriamo $\Box^{n+1} p = \Box(\Box^n p)$.
- $\Box(\Box^n p) \rightarrow \Box(\Box p)$ [ipotesi induttiva + monotonia]
- $\Box(\Box p) \rightarrow \Box p$ [contrapponendo l'assioma 4: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$]

Aspetta, l'ultimo passaggio è scorretto. Da $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ non possiamo dedurre $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ semplicemente contrapponendo.

Correzione:

Direzione ($\rightarrow$): $\Box^n p \rightarrow \Box p$ è evidente dal fatto che $\Box$ è idempotente verso il basso: $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ è derivabile in qualsiasi logica normale con l'assioma T.

No, aspetta. In effetti, $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ non segue dall'assioma T alone. L'assioma T dice $\Box p \rightarrow p$, non $\Box\Box p \rightarrow \Box p$.

Procediamo più attentamente:

1. $\Box\Box p \rightarrow \Box p$ [applicando T con $\Box p$ al posto di p: $\Box(\Box p) \rightarrow \Box p$]

No, questo è ancora errato. T dice $\Box\varphi \rightarrow \varphi$ per ogni φ. Se sostituiamo φ con $\Box p$, otteniamo:

$\Box(\Box p) \rightarrow \Box p$

che è esattamente $\Box\Box p \rightarrow \Box p$. Corretto!

Quindi $\Box^{n+1} p = \Box(\Box^n p) \rightarrow \Box^n p \rightarrow \ldots \rightarrow \Box^2 p \rightarrow \Box p$.

Direzione ($\leftarrow$): $\Box p \rightarrow \Box^n p$

Per n=2: $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ [Assioma 4 direttamente]

Per n>2, per induzione:

- Assumiamo $\Box p \rightarrow \Box^n p$
- $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ [Assioma 4]
- $\Box\Box p \rightarrow \Box(\Box^n p) = \Box^{n+1} p$ [ipotesi induttiva applicata a $\Box p$ + monotonia]

Quindi $\Box p \leftrightarrow \Box^n p$ per ogni $n \geq 1$.

Per $\Diamond$:

Usando la dualità $\Diamond p = \neg\Box\neg p$:

$\Diamond^n p = \neg\Box^n\neg p \leftrightarrow \neg\Box\neg p = \Diamond p$

Teorema 2.8 (Forma Normale delle Formule in S4):

Ogni formula in S4 è equivalente a una formula in cui nessuna concatenazione di operatori modali contiene più di un $\Box$ o più di un $\Diamond$ consecutivi.

In altre parole, ogni sequenza $\Box\Box...\Box$ può essere ridotta a $\Box$, e ogni sequenza $\Diamond\Diamond...\Diamond$ può essere ridotta a $\Diamond$.

Questo significa che la "profondità modale"massima effettiva in S4 è limitata.

Teorema 2.9 (Decidibilità di S4):

S4 è decidibile. Esistono procedure effettive (tableaux, alberi di dimostrazione, metodi di filtrazione) per determinare se una formula è un teorema di S4.

2.5.4 Semantica di Kripke per S4

S4 è caratterizzato dalla classe di frame $\langle W, R\rangle$ dove R è una relazione **riflessiva e transitiva**(un preordine).

Definizione (Frame di Kripke):
Un frame di Kripke è una coppia $F = \langle W, R\rangle$ dove:

- $W \neq \varnothing$ è un insieme (di "mondi possibili")
- $R \subseteq W \times W$ è una relazione binaria (di "accessibilità")

Definizione (Modello di Kripke):
Un modello di Kripke è una tripla $M = \langle W, R, V\rangle$ dove:

- $\langle W, R\rangle$ è un frame
- V: Var $\rightarrow$ P(W) è una funzione di valutazione che assegna a ogni variabile proposizionale l'insieme di mondi in cui è vera

Definizione (Relazione di Soddisfacimento $\vDash$):

Definiamo induttivamente quando una formula φ è vera in un mondo w di un modello M (notazione: $M, w \vDash \varphi$):

- $M, w \vDash p \Leftrightarrow w \in V(p)$
- $M, w \vDash \neg\varphi \Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$
- $M, w \vDash \varphi \wedge \psi \Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ e $M, w \vDash \psi$
- $M, w \vDash \varphi \vee \psi \Leftrightarrow M, w \vDash \varphi$ o $M, w \vDash \psi$
- $M, w \vDash \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow M, w \nvDash \varphi$ o $M, w \vDash \psi$
- **$M, w \vDash \Box\varphi \Leftrightarrow \forall v \in W\ (wRv \Rightarrow M, v \vDash \varphi)$**
- **$M, w \vDash \Diamond\varphi \Leftrightarrow \exists v \in W\ (wRv \wedge M, v \vDash \varphi)$**

Teorema 2.10 (Corrispondenza per S4):

(i) L'assioma T ($\Box p \rightarrow p$) corrisponde alla riflessività di R:
$\forall w \in W: wRw$

(ii) L'assioma 4 ($\Box p \rightarrow \Box\Box p$) corrisponde alla transitività di R:
$\forall u, v, w \in W$: $(uRv \wedge vRw \Rightarrow uRw)$

Dimostrazione di (i):

($\Rightarrow$) Assumiamo che $\Box p \rightarrow p$ sia valida in tutti i modelli su $F = \langle W, R \rangle$. Supponiamo per assurdo che esista $w \in W$ tale che $\neg(wRw)$. Definiamo $V(p) = W \setminus \{w\}$. Allora:

- $M, w \vDash \Box p$ poiché per ogni v con wRv (e $v \neq w$ per ipotesi), $M, v \vDash p$
- $M, w \nvDash p$ poiché $w \notin V(p)$
- Quindi $M, w \vDash \Box p \wedge \neg p$, contraddicendo $\Box p \rightarrow p$

($\Leftarrow$) Assumiamo che R sia riflessiva. Sia M un modello su questo frame e $w \in W$ tale che $M, w \vDash \Box p$. Allora per ogni v con wRv, $M, v \vDash p$. Ma wRw (riflessività), quindi $M, w \vDash p$.

Dimostrazione di (ii):

($\Rightarrow$) Assumiamo che $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ sia valida in tutti i modelli su $F = \langle W, R \rangle$. Supponiamo per assurdo che esistano $u, v, w \in W$ con uRv, vRw ma $\neg(uRw)$. Definiamo $V(p) = W \setminus \{w\}$. Allora:

- $M, v \vDash \Box p$ poiché per ogni x con vRx, $M, x \vDash p$ (incluso w... no aspetta, vRw quindi w deve soddisfare p, ma $w \notin V(p)$. Contraddizione nella costruzione.

Rivediamo: Definiamo V(p) tale che $w \notin V(p)$ ma $\forall x \neq w$: $x \in V(p)$. Allora:

- $M, v \vDash \Box p$? No, perché vRw e $M, w \nvDash p$.

Costruiamo diversamente: Vogliamo $M, u \vDash \Box p$ ma $M, u \nvDash \Box\Box p$.

Definiamo $V(p) = \{x \in W \mid$ non esiste cammino da u a x attraverso v a w$\}$.

Questo è troppo complicato. Usiamo un approccio più diretto:

Consideriamo il modello con $W = \{u, v, w\}$, $R = \{(u,v), (v,w), (u,u), (v,v), (w,w)\}$ (riflessivo ma non transitivo: manca (u,w)), e $V(p) = \{u, v\}$.

- $M, w \nvDash p$
- $M, v \vDash \Box p$? No, perché vRw e $M, w \nvDash p$.

Riformuliamo: Consideriamo $V(p) = \{x \mid uRx\}$, cioè p è vera in tutti i mondi accessibili da u.

- Se R è transitiva, allora per ogni v con uRv e ogni w con vRw, abbiamo uRw, quindi $w \in V(p)$.
- Quindi $M, v \vDash \Box p$ per ogni v con uRv.
- Quindi $M, u \vDash \Box\Box p$.

Ma se R non è transitiva, possiamo avere uRv, vRw, ma $\neg(uRw)$, quindi $w \notin V(p)$, quindi $M, v \nvDash \Box p$, quindi $M, u \nvDash \Box\Box p$, contraddicendo $\Box p \rightarrow \Box\Box p$.

($\Leftarrow$) Assumiamo che R sia transitiva. Sia M un modello e w tale che $M, w \vDash \Box p$. Vogliamo mostrare $M, w \vDash \Box\Box p$, cioè per ogni v con wRv, $M, v \vDash \Box p$.

Sia v tale che wRv. Dobbiamo mostrare $M, v \vDash \Box p$, cioè per ogni u con vRu, $M, u \vDash p$.

Sia u tale che vRu. Poiché wRv e vRu e R è transitiva, wRu. Ma M, w $\models \Box p$, quindi M, u $\models$ p.

Teorema 2.11 (Soundness e Completeness di S4):

(Soundness) Se $\vdash_{S4} \varphi$, allora φ è valida in tutti i frame riflessivi e transitivi.

(Completeness) Se φ è valida in tutti i frame riflessivi e transitivi, allora $\vdash_{S4} \varphi$.

Dimostrazione (schema della completeness):

Costruiamo il **modello canonico** per S4:

- $W_c = \{\Gamma \mid \Gamma$ è un insieme massimale S4-consistente$\}$
- $\Gamma \, R_c \, \Delta \iff \{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\} \subseteq \Delta$
- $V_c(p) = \{\Gamma \in W_c \mid p \in \Gamma\}$

Lemma di Verità: Per ogni formula φ e ogni $\Gamma \in W_c$: $M_c, \Gamma \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma$

Dimostrazione del Lemma di Verità per $\Box$:

($\Rightarrow$) Assumiamo $M_c, \Gamma \models \Box\varphi$. Supponiamo per assurdo che $\Box\varphi \notin \Gamma$. Allora $\neg\Box\varphi \in \Gamma$ (per massimalità), cioè $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$.

Costruiamo Δ massimale S4-consistente tale che $\Gamma \, R_c \, \Delta$ e $\neg\varphi \in \Delta$.

Definiamo $\Delta_0 = \{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \cup \{\neg\varphi\}$. Questo insieme è S4-consistente: altrimenti esisterebbero $\Box\psi_1, ..., \Box\psi_n \in \Gamma$ tali che $\vdash_{S4} (\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi$, quindi $\vdash_{S4} \Box((\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_n) \rightarrow \varphi)$, quindi $\vdash_{S4} (\Box\psi_1 \wedge ... \wedge \Box\psi_n) \rightarrow \Box\varphi$ (usando K ripetutamente). Ma $\Box\psi_1, ..., \Box\psi_n \in \Gamma$, quindi $\Box\varphi \in \Gamma$, contraddicendo $\Diamond\neg\varphi \in \Gamma$.

Estendiamo Δ_0 a un insieme massimale Δ. Allora $\Gamma \, R_c \, \Delta$ e $\neg\varphi \in \Delta$, quindi $M_c, \Delta \not\models \varphi$, contraddicendo $M_c, \Gamma \models \Box\varphi$.

($\Leftarrow$) Assumiamo $\Box\varphi \in \Gamma$. Sia Δ tale che $\Gamma \, R_c \, \Delta$. Allora $\varphi \in \Delta$ (per definizione di R_c), quindi $M_c, \Delta \models \varphi$ (per ipotesi induttiva). Quindi $M_c, \Gamma \models \Box\varphi$.

Verifica che R_c è riflessiva:

Dobbiamo mostrare che per ogni Γ, $\Gamma \, R_c \, \Gamma$, cioè $\{\varphi \mid \Box\varphi \in \Gamma\} \subseteq \Gamma$.

Sia $\Box\varphi \in \Gamma$. Poiché $\vdash_{S4} \Box\varphi \rightarrow \varphi$ (assioma T), e Γ è chiuso sotto modus ponens, $\varphi \in \Gamma$.

Verifica che R_c è transitiva:

Dobbiamo mostrare che se $\Gamma \, R_c \, \Delta$ e $\Delta \, R_c \, \Sigma$, allora $\Gamma \, R_c \, \Sigma$.

Sia $\Box\varphi \in \Gamma$. Per l'assioma 4, $\vdash_{S4} \Box\varphi \rightarrow \Box\Box\varphi$, quindi $\Box\Box\varphi \in \Gamma$. Poiché $\Gamma \, R_c \, \Delta$, $\Box\varphi \in \Delta$. Poiché $\Delta \, R_c \, \Sigma$, $\varphi \in \Sigma$. Quindi $\{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \subseteq \Sigma$.

Quindi R_c è un preordine, e M_c è un modello su un frame riflessivo-transitivo. Il Lemma di Verità completa la dimostrazione della completeness.

2.6 Sistema S5: Il Sistema dell'Equivalenza

S5 è il sistema modale più forte della famiglia Lewis ed è caratterizzato da una semantica

particolarmente semplice e perspicua.

2.6.1 Assiomi Caratterizzanti di S5

S5 = S4 + (A-5)

(A-5)$\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$
Se qualcosa è possibile, allora è necessariamente possibile

Equivalentemente:

(A-5')$\Diamond\Box p \rightarrow p$
(Assioma B di Brouwer)

(A-5'')$\neg\Box p \rightarrow \Box\neg\Box p$
Se qualcosa non è necessario, allora è necessariamente non-necessario

2.6.2 Giustificazione Filosofica dell'Assioma 5

L'assioma 5 riflette una concezione molto forte della modalità: gli stati modali sono assoluti, non relativi. Se qualcosa è possibile, questo fatto non è contingente—è necessariamente possibile.

Interpretazione aletica: Se p è possibile (cioè, non contraddittoria, coerente), allora questo fatto logico non può cambiare. La possibilità logica di p è una proprietà stabile.

Interpretazione epistemica: Se interpretiamo $\Box$ come "l'agente sa che", l'assioma 5 diventa: "Se l'agente non sa che p, allora l'agente sa che non sa che p". Questo è il principio di **introspezione negativa**: un agente è consapevole della propria ignoranza.

Combinando con l'assioma 4 (introspezione positiva), in S5 l'agente ha **perfetta introspezione**: sa che cosa sa e sa che cosa non sa.

2.6.3 Teoremi Fondamentali di S5

Teorema 2.12 (Riduzione di Concatenazioni Modali):

In S5, ogni concatenazione di operatori modali è equivalente all'ultimo operatore nella concatenazione:

- $\Box\Diamond\Box\Diamond...\Diamond p \equiv_S5 \Diamond p$
- $\Diamond\Box\Diamond\Box...\Box p \equiv_S5 \Box p$

Dimostrazione (schema):

Osserviamo le seguenti equivalenze derivabili in S5:

1. $\Box\Box p \leftrightarrow \Box p$ [da S4]
2. $\Diamond\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ [da S4]
3. $\Box\Diamond p \leftrightarrow \Diamond p$ [da A-5: $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ e T: $\Box\Diamond p \rightarrow \Diamond p$]
4. $\Diamond\Box p \leftrightarrow \Box p$ [duale di 3]

Usando 1-4 ripetutamente, ogni sequenza di $\Box$ e $\Diamond$ può essere ridotta applicando le regole:

- Elimina $\Box\Box$, $\Diamond\Diamond$

- Riduci $\Box\Diamond$ a $\Diamond$
- Riduci $\Diamond\Box$ a $\Box$

Il risultato finale dipende solo dall'ultimo operatore.

Teorema 2.13 (Forma Normale di Lemmon):

Ogni formula modale in S5 è equivalente a una formula della forma:

$Q_1\varphi_1 \wedge Q_2\varphi_2 \wedge ... \wedge Q_n\varphi_n$

dove $Q_i \in \{\Box, \Diamond, \varepsilon\}$ (ε = nessun operatore) e φ_i sono formule proposizionali (senza operatori modali).

Dimostrazione (schema):

1. Porta la formula in forma normale negativa (negazioni solo davanti ad atomi)
2. Distribuisci le congiunzioni esternamente
3. Per ogni sottoformula $Q_1Q_2...Q_k\psi$ con ψ proposizionale, riduci usando il Teorema 2.12 a $Q'\psi$ dove $Q' \in \{\Box, \Diamond, \varepsilon\}$

Teorema 2.14 (Decidibilità Efficiente):

S5 è decidibile e il problema di soddisfacibilità è NP-completo (più efficiente di S4 che è PSPACE-completo).

2.6.4 Semantica di Kripke per S5

S5 è caratterizzato dalla classe di frame $\langle W, R\rangle$ dove R è una **relazione di equivalenza**(riflessiva, transitiva e simmetrica).

Teorema 2.15 (Corrispondenza per S5):

L'assioma 5 ($\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$) corrisponde alla simmetria di R:

$\forall u, v \in W: (uRv \Rightarrow vRu)$

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Assumiamo che $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ sia valida in tutti i modelli su $F = \langle W, R\rangle$. Supponiamo che esistano $u, v \in W$ con uRv ma $\neg(vRu)$.

Definiamo $V(p) = \{w \mid vRw\}$. Allora:

- $M, v \vDash \Box p$ (poiché per ogni w con vRw, $w \in V(p)$ per definizione)
- $M, u \vDash \Diamond\Box p$ (poiché uRv e $M, v \vDash \Box p$)
- Per l'assioma 5, $M, u \vDash \Box\Diamond p$
- Quindi per ogni w con uRw, $M, w \vDash \Diamond p$
- In particolare, $M, v \vDash \Diamond p$ (poiché uRv)
- Quindi esiste x con vRx tale che $M, x \vDash p$
- Ma per costruzione, $M, x \vDash p \Leftrightarrow vRx$, che è sempre vero per x nel range di R da v

Questa dimostrazione è troppo circolare. Procediamo diversamente.

Consideriamo il contromodello con W = {u, v}, uRv, ¬(vRu), uRu, vRv (riflessivo ma non simmetrico), e V(p) = ∅.

- M, u ⊨ ◇p? No, poiché per ogni w con uRw (cioè u e v), M, w ⊭ p.

Quindi ◇p è falsa in u, e l'assioma ◇p → □◇p è vacuamente vero.

Dobbiamo costruire un controesempio più attento. Consideriamo V(p) tale che esista w con vRw dove p è vera, ma non esiste x con uRx tale che da x accediamo a un mondo p-vero.

W = {u, v, w}, R = {(u,u), (u,v), (v,v), (v,w), (w,w)}, V(p) = {w}.

- M, v ⊨ ◇p (poiché vRw e M, w ⊨ p)
- M, u ⊨ ◇◇p? (poiché uRv e M, v ⊨ ◇p), sì
- Ma M, u ⊨ □◇p? Per questo, per ogni x con uRx, dobbiamo avere M, x ⊨ ◇p.
- Per x=u: M, u ⊨ ◇p? Esiste y con uRy tale che M, y ⊨ p? uR{u,v}, M, u ⊭ p, M, v ⊭ p. No.

Quindi M, u ⊭ □◇p. Ma M, u ⊨ ◇p? No. Quindi l'assioma è vacuamente vero ancora.

Il problema è che stiamo usando ◇◇p, non ◇p nell'antecedente dell'assioma.

Rivediamo l'assioma: ◇p → □◇p.

Costruiamo W = {u, v}, R = {(u,u), (u,v), (v,v)}, V(p) = {v}.

- M, u ⊨ ◇p (poiché uRv e M, v ⊨ p)
- M, u ⊨ □◇p? Per ogni w con uRw, M, w ⊨ ◇p?
- Per w=u: M, u ⊨ ◇p, già visto che sì.
- Per w=v: M, v ⊨ ◇p? Esiste x con vRx tale che M, x ⊨ p? vRv e M, v ⊨ p, sì.

Quindi M, u ⊨ □◇p. L'assioma è soddisfatto.

Il problema è che con riflessività, automaticamente vRv, quindi v accede a se stesso dove p è vera.

Costruiamo: W = {u, v, w}, R = {(u,u), (u,v), (v,v), (v,w), (w,w)}, V(p) = {w}.

- M, u ⊨ ◇p? Esiste x con uR x tale che M, x ⊨ p? uR{u,v}, M, u ⊭ p, M, v ⊭ p. No.

Quindi l'antecedente è falso in u.

Proviamo: W = {u, v, w}, R = {(u,u), (u,v), (u,w), (v,v), (w,w)}, V(p) = {w}.

- M, u ⊨ ◇p (poiché uRw e M, w ⊨ p)
- M, u ⊨ □◇p? Per ogni x con uRx (x ∈ {u, v, w}), M, x ⊨ ◇p?
- Per x=u: M, u ⊨ ◇p, sì (già visto)
- Per x=v: M, v ⊨ ◇p? Esiste y con vRy tale che M, y ⊨ p? vRv, M, v ⊭ p. No.

Quindi M, v ⊭ ◇p, quindi M, u ⊭ □◇p. Ma M, u ⊨ ◇p.

Quindi M, u ⊨ ◇p ∧ ¬□◇p, violando ◇p → □◇p.

Però R non è simmetrica: uRv ma ¬(vRu) (vRv ma non vRu).

No aspetta, abbiamo solo vRv, non vRu. Quindi R = {(u,u), (u,v), (u,w), (v,v), (w,w)} non ha vRu, quindi non è simmetrica.

Questo conferma: se R non è simmetrica, l'assioma 5 può essere violato.

($\Leftarrow$) Assumiamo che R sia simmetrica (oltre a riflessiva e transitiva). Sia M un modello e u tale che M, u $\vDash \Diamond p$. Vogliamo mostrare M, u $\vDash \Box\Diamond p$.

M, u $\vDash \Diamond p$ significa che esiste v con uRv e M, v $\vDash$ p.

Sia w tale che uRw. Vogliamo mostrare M, w $\vDash \Diamond p$, cioè esiste x con wRx e M, x $\vDash$ p.

Poiché uRw e R è simmetrica, wRu. Poiché uRv e wRu, e R è transitiva, wRv. Poiché M, v $\vDash$ p, M, w $\vDash \Diamond p$.

Quindi M, u $\vDash \Box\Diamond p$.

Conseguenza: In S5, ogni frame è partizionato in classi di equivalenza, e all'interno di ogni classe, tutti i mondi accedono a tutti (e a se stessi). La struttura è molto semplice.

Casi speciali:

- **Frame universale:**W con R = W × W (tutti i mondi accedono a tutti). Questo è il caso più semplice di S5.
- In questo caso, $\Box\varphi$ significa "φ è vera in tutti i mondi"e $\Diamond\varphi$ significa "φ è vera in almeno un mondo".

Teorema 2.16 (Completeness di S5):

S5 è completo rispetto alla classe di frame di equivalenza.

Dimostrazione:Simile a S4, costruendo il modello canonico e verificando che R_c è una relazione di equivalenza usando l'assioma 5 per dimostrare la simmetria.

3. Relazioni tra i Sistemi e Teoria della Dimostrazione

3.1 Gerarchia di Inclusione

Teorema 3.1 (Inclusioni Strette):

S1 $\subsetneq$ S2 $\subsetneq$ S3 $\subsetneq$ S4 $\subsetneq$ S5

dove $\subsetneq$ indica inclusione propria (stretta).

Dimostrazione delle separazioni:

S1 $\subsetneq$ S2:
La formula $\Diamond\Diamond p \rightarrow \Diamond p$ è un teorema di S2 ma non di S1.

Per mostrare che non è un teorema di S1, costruiamo un modello (in una semantica appropriata per S1, come la neighborhood semantics) dove la formula è falsa.

S2 $\subsetneq$ S3:
L'assioma S3 ($\Diamond(\Box p \wedge q) \rightarrow \Box(p \vee \Diamond q)$) è un teorema di S3 ma non di S2.

S3 ⊊ S4:
La formula $\Box p \rightarrow \Box\Box p$ è un teorema di S4 ma non di S3.

S4 ⊊ S5:
La formula $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ è un teorema di S5 ma non di S4.

Controesempio per S4: Consideriamo il frame con $W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$ (riflessivo e transitivo ma non simmetrico), e $V(p) = \{w_2\}$.

- $M, w_1 \vDash \Diamond p$ (poiché $w_1 R w_2$ e $M, w_2 \vDash p$)
- $M, w_1 \vDash \Box\Diamond p$? Per ogni v con $w_1 R v$, $M, v \vDash \Diamond p$?
- Per $v=w_1$: $M, w_1 \vDash \Diamond p$, sì
- Per $v=w_2$: $M, w_2 \vDash \Diamond p$? Esiste u con $w_2 R u$ e $M, u \vDash p$? Solo $w_2 R w_2$ e $M, w_2 \vDash p$, sì.

Quindi $M, w_1 \vDash \Box\Diamond p$. Questo non funziona come controesempio.

Proviamo diversamente: $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2), (w_2, w_3), (w_3, w_3)\}$, $V(p) = \{w_3\}$.

No, questa relazione non è transitiva: $w_1 R w_2$ e $w_2 R w_3$ ma non $w_1 R w_3$.

Per S4, R deve essere riflessiva e transitiva. Costruiamo: $W = \{w, v, u\}$, R è l'ordine parziale $w \leq v \leq u$ (cioè $R = \{(w,w), (w,v), (w,u), (v,v), (v,u), (u,u)\}$), e $V(p) = \{u\}$.

$M, w \vDash \Diamond p$ (poiché wRu e $M, u \vDash p$)

$M, w \vDash \Box\Diamond p$? Per ogni x con wRx, $M, x \vDash \Diamond p$?

Per $x=w$: $M, w \vDash \Diamond p$, sì

Per $x=v$: $M, v \vDash \Diamond p$? Esiste y con vRy e $M, y \vDash p$? vRu e $M, u \vDash p$, sì

Per $x=u$: $M, u \vDash \Diamond p$? uRu e $M, u \vDash p$, sì

Quindi ancora l'assioma è soddisfatto. Il problema è che con transitività, se w accede a u (dove p è vera), allora ogni mondo intermedio v accessibile da w accede anche a u.

Il controesempio corretto richiede che wRv ma $\neg(vRu)$, violando la transitività, oppure considerare un modello non-Kripke.

In realtà, per S4 su frame riflessivi-transitivi, l'assioma 5 non è derivabile. Il controesempio standard è:

$W = \{w_1, w_2\}$, $R = \{(w_1, w_1), (w_1, w_2), (w_2, w_2)\}$, $V(p) = \{w_2\}$

$M, w_1 \vDash \Diamond p$ (poiché $w_1 R w_2$ e $M, w_2 \vDash p$)

$M, w_1 \vDash \Box\Diamond p$? No, perché per $v=w_2$: $M, w_2 \vDash \Diamond p$ richiede che esista u con $w_2 R u$ e $M, u \vDash p$. Solo $w_2 R w_2$, quindi servono $M, w_2 \vDash p$, che è vero.

Proviamo $V(p) = \varnothing$:

$M, w_1 \nvDash \Diamond p$, quindi l'antecedente è falso.

Costruzione corretta: $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, R preordine a catena $w_1 R w_2 R w_3$ ($R = \{(w_1,w_1), (w_1,w_2),$

(w_1,w_3), (w_2,w_2), (w_2,w_3), $(w_3,w_3)\}$), $V(p) = \{w_3\}$.

$M, w_1 \vDash \Diamond p$ (w_1Rw_3)

$M, w_1 \vDash \Box\Diamond p$? Per ogni v con w_1Rv:

- $v=w_1$: $\Diamond p$ è vero

- $v=w_2$: $M, w_2 \vDash \Diamond p$? w_2Rw_3 e $w_3 \vDash p$, sì

- $v=w_3$: w_3Rw_3 e $w_3 \vDash p$, sì

L'assioma è ancora soddisfatto. In frame transitivi, è difficile violare $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ con semplici costruzioni.

Il controesempio definitivo usa frame non-simmetrici più complessi, oppure consideriamo $V(p) = \{w_2\}$ e $W = \{w_1, w_2, w_3\}$, $R = \{(w_1,w_1), (w_1,w_2), (w_2,w_2), (w_3,w_3), (w_3,w_2)\}$.

Questo non è transitivo. Per avere un vero controesempio in S4, dobbiamo accettare che la costruzione è non-triviale. Il fatto chiave è che esistono modelli riflessivi-transitivi dove $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ fallisce, separando S4 da S5.

3.1 Gerarchia di Inclusione (continuazione)

Il controesempio standard che effettivamente separa S4 da S5 richiede una costruzione più sofisticata. Consideriamo il frame con $W = \{w_0, w_1, w_2\}$, dove R è definita come segue: $R = \{(w_0,w_0), (w_0,w_1), (w_0,w_2), (w_1,w_1), (w_1,w_2), (w_2,w_2), (w_2,w_1)\}$. Questa relazione è riflessiva e transitiva, ma non simmetrica: abbiamo w_0Rw_1 ma non w_1Rw_0.

Definiamo $V(p) = \{w_1\}$. Allora:

- $M, w_0 \vDash \Diamond p$ poiché w_0Rw_1 e $M, w_1 \vDash p$
- Per verificare se $M, w_0 \vDash \Box\Diamond p$, dobbiamo controllare che per ogni v con w_0Rv, si abbia $M, v \vDash \Diamond p$
- Per $v = w_0$: $M, w_0 \vDash \Diamond p$ è già verificato
- Per $v = w_1$: $M, w_1 \vDash \Diamond p$? Abbiamo w_1Rw_1 e w_1Rw_2. PoichÃ© $M, w_1 \vDash p$ e w_1Rw_1, certamente $M, w_1 \vDash \Diamond p$
- Per $v = w_2$: $M, w_2 \vDash \Diamond p$? Abbiamo w_2Rw_2 e w_2Rw_1. PoichÃ© $M, w_1 \vDash p$ e w_2Rw_1, anche $M, w_2 \vDash \Diamond p$

Questo esempio non funziona ancora. La costruzione corretta utilizza una struttura più complessa o considera proprietà più sottili. Tuttavia, il risultato metalogico è ben stabilito: esistono formule valide in S5 che non sono teoremi di S4, e la formula $\Diamond p \rightarrow \Box\Diamond p$ è proprio una di queste. La dimostrazione rigorosa della separazione richiede tecniche di filtrazione o costruzione di modelli canonici troncati che mostrano come S4 non possa derivare l'assioma 5.

3.2 Proprietà di Interpolazione

Una proprietà metalogica importante per i sistemi modali è l'interpolazione di Craig, che stabilisce relazioni strutturali tra formule derivabili.

Teorema 3.2 (Interpolazione di Craig per S4 e S5): Se $\vdash_S \varphi \rightarrow \psi$ dove $S \in \{S4, S5\}$, allora esiste una formula χ (l'interpolante) tale che: (i) $\vdash_S \varphi \rightarrow \chi$ (ii) $\vdash_S \chi \rightarrow \psi$
(iii) Ogni variabile proposizionale in χ appare sia in φ che in ψ

Questa proprietà è fondamentale perché garantisce che le implicazioni derivabili possano essere "fattorizzate"attraverso formule intermedie che catturano esattamente il contenuto informativo condiviso. In termini semantici, se φ implica ψ in tutti i modelli, allora esiste un "concetto intermedio"χ esprimibile nel linguaggio comune a φ e ψ che media l'implicazione. Per S1 e S2, la situazione è più delicata. S1 non gode della proprietà di interpolazione nella sua forma piena, a causa della debolezza delle sue assunzioni modali. S2 e S3 hanno proprietà di interpolazione sotto certe restrizioni, ma la caratterizzazione precisa è tecnicamente complessa.

3.3 Decidibilità e Complessità Computazionale

Un aspetto cruciale per l'applicabilità pratica dei sistemi modali è la loro decidibilità e la complessità degli algoritmi di decisione.

Teorema 3.3 (Decidibilità dei Sistemi S): Tutti i sistemi S1-S5 sono decidibili. Esiste cioè un algoritmo effettivo che, data una formula φ arbitraria, determina in tempo finito se $\vdash_S \varphi$.

La dimostrazione della decidibilità per S4 e S5 utilizza la semantica di Kripke e metodi di filtrazione. L'idea è che ogni formula può essere verificata su modelli finiti di dimensione limitata in funzione della complessità della formula stessa. Più precisamente:

Lemma 3.4 (Proprietà del Modello Finito per S4 e S5): Se φ non è un teorema di S4 (rispettivamente S5), allora esiste un modello finito di Kripke che falsifica φ.

Dimostrazione (schema per S4): Supponiamo che φ non sia un teorema di S4. Allora φ è falsificabile nel modello canonico $M_c = \langle W_c, R_c, V_c \rangle$ costruito come nella dimostrazione di completezza. Tuttavia, M_c è generalmente infinito. Utilizziamo la tecnica di filtrazione:

Sia Sub(φ) l'insieme delle sottoformule di φ (incluse le negazioni di sottoformule). Definiamo una relazione di equivalenza su W_c: $\Gamma \equiv_\varphi \Delta \iff \forall \psi \in \text{Sub}(\varphi): (\psi \in \Gamma \iff \psi \in \Delta)$

Questa relazione identifica mondi che sono indistinguibili rispetto alle sottoformule di φ. Sia $W_f = W_c/\equiv_\varphi$ l'insieme delle classi di equivalenza, che è finito poiché $|W_f| \leq 2^{|\text{Sub}(\varphi)|}$.

Definiamo R_f su W_f in modo che preservi le proprietà modali: $[\Gamma] R_f [\Delta]$ se e solo se: (i) Per ogni $\Box\psi \in \text{Sub}(\varphi)$: se $\Box\psi \in \Gamma$, allora $\psi \in \Delta$ (ii) Per ogni $\Diamond\psi \in \text{Sub}(\varphi)$: se $\psi \in \Delta$, allora $\Diamond\psi \in \Gamma$

Si può dimostrare che R_f è riflessiva e transitiva (eredita queste proprietà da R_c), e che il modello filtrato $M_f = \langle W_f, R_f, V_f \rangle$ (con V_f appropriatamente definita) soddisfa:

$M_f, [\Gamma] \models \psi \iff M_c, \Gamma \models \psi$ per ogni $\psi \in \text{Sub}(\varphi)$

In particolare, se $M_c, \Gamma_0 \not\models \varphi$ per qualche Γ_0, allora $M_f, [\Gamma_0] \not\models \varphi$. Quindi φ è falsificabile in un modello finito.

Questo risultato fornisce immediatamente un algoritmo di decisione: per determinare se φ è un teorema di S4, generiamo tutti i modelli finiti su frame riflessivi-transitivi con al massimo $2^{|\text{Sub}(\varphi)|}$ mondi e verifichiamo se φ è valida in tutti questi modelli. Se sì, allora φ è un teorema (per completezza); se no, abbiamo trovato un contromodello.

La complessità computazionale di questo problema varia tra i sistemi:

Teorema 3.5 (Complessità Computazionale):

- Il problema di soddisfacibilità per S5 è NP-completo

- Il problema di soddisfacibilità per S4 è PSPACE-completo
- Il problema di soddisfacibilità per S1-S3 è decidibile ma con complessità superiore

La differenza tra S4 e S5 è notevole. S5, grazie alla sua struttura di equivalenza, ammette una riduzione relativamente diretta a SAT proposizionale: una formula in S5 è soddisfacibile se e solo se la sua "traduzione proposizionale"(sostituendo $\Box\psi$ e $\Diamond\psi$ con nuove variabili soggette a vincoli appropriati) è soddisfacibile. Il numero di variabili cresce linearmente con la dimensione della formula, mantenendo la complessità in NP. S4, al contrario, richiede di considerare strutture potenzialmente profonde di accessibilità transitiva, e la verifica di soddisfacibilità richiede spazio polinomiale per memorizzare cammini attraverso il modello. La dimostrazione della PSPACE-completezza procede per riduzione da QBF (quantified boolean formulas).

3.4 Assiomatizzazioni Alternative e Sistemi Equivalenti

I sistemi S1-S5 ammettono numerose assiomatizzazioni alternative. Lewis stesso fornì presentazioni diverse nel corso degli anni, e la letteratura successiva ha sviluppato formulazioni più efficienti dal punto di vista deduttivo.

Sistema S4: Formulazione di Gödel

Una presentazione particolarmente elegante di S4, dovuta a Gödel (1933), utilizza:

Base: Logica proposizionale classica completa Regole:

- Modus Ponens
- Necessitazione: da α inferire $\Box\alpha$

Assiomi modali: (K) $\Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$ (T) $\Box p \to p$ (4) $\Box p \to \Box\Box p$

Questa assiomatizzazione è notevolmente più compatta delle 19 assiomi originali di Lewis per S1. L'assioma K, chiamato anche assioma di Kripke o assioma di distributività, cattura l'idea che la necessità distribuisce sull'implicazione materiale. È l'assioma caratteristico delle logiche modali "normali".

Teorema 3.6 (Equivalenza delle Assiomatizzazioni):Il sistema S4 di Lewis (con tutti gli assiomi A1-A19 più A-T e A-4) è deduttivamente equivalente al sistema di Gödel (con base proposizionale, MP, Necessitazione, K, T, 4).

Dimostrazione (schema): ($\Rightarrow$) Dobbiamo mostrare che ogni teorema del sistema di Lewis è derivabile nel sistema di Gödel.

- Gli assiomi A1-A10 sono già inclusi nella base proposizionale
- L'assioma K è derivabile in Lewis come Teorema 2.1
- Gli assiomi T e 4 sono già presenti (come A12 e A-4)
- Le regole MP e Necessitazione sono identiche

($\Leftarrow$) Dobbiamo mostrare che ogni assioma di Lewis è derivabile nel sistema di Gödel.

- A1-A10 sono immediati
- A11 ($\Box(p\wedge q) \Longleftrightarrow (\Box p\wedge\Box q)$) è derivabile da K: Direzione ($\to$): $\Box(p\wedge q) \to \Box p$ segue da $(p\wedge q) \to p$ e monotonia Direzione ($\leftarrow$): $(\Box p\wedge\Box q) \to \Box(p\wedge q)$ richiede di mostrare che da $\Box p$ e $\Box q$ possiamo derivare $\Box(p\wedge q)$ Da p e q deriviamo $p\wedge q$ (A5) Applicando Necessitazione: da $\vdash (p\wedge q)$ otteniamo $\vdash \Box(p\wedge q)$ se abbiamo $\vdash p$ e $\vdash q$ Ma questo

non è corretto così. Procediamo diversamente. Abbiamo □p e □q (ipotesi). Vogliamo □(p∧q). Da p → (q → (p∧q)) (istanza di A5) applichiamo Necessitazione: □(p → (q → (p∧q))) Per K due volte: □(p → (q → (p∧q))) → (□p → □(q → (p∧q))) Quindi: □p → □(q → (p∧q)) Applicando di nuovo K: □(q → (p∧q)) → (□q → □(p∧q)) Componendo: □p → (□q → □(p∧q)) Da □p e □q otteniamo □(p∧q)

- A12 (□p → p) è T
- A13-A19 coinvolgono l'implicazione stretta (p -3 q := □(p → q)). Questi assiomi sono derivabili usando K, T, 4 e le proprietà dell'implicazione materiale.

La dimostrazione completa richiede di verificare tutti i 19 assiomi, ma il principio è che K, T, 4 catturano completamente la struttura modale di S4.

Sistema S5: Formulazioni Alternative

Per S5, esistono numerose assiomatizzazioni equivalenti. Oltre a S4 + assioma 5, possiamo utilizzare:

Formulazione 1 (base K-T-5):

- Base proposizionale + MP + Necessitazione
- (K) □(p → q) → (□p → □q)
- (T) □p → p
- (5) ◇p → □◇p

Formulazione 2 (base K-T-B):

- Base proposizionale + MP + Necessitazione
- (K) □(p → q) → (□p → □q)
- (T) □p → p
- (B) p → □◇p [Assioma di Brouwer]

Formulazione 3 (base K-T-E):

- Base proposizionale + MP + Necessitazione
- (K) □(p → q) → (□p → □q)
- (T) □p → p
- (E) ◇□p → □◇p [Assioma di convergenza]

Teorema 3.7 (Equivalenza delle Formulazioni di S5): Le tre formulazioni sopra sono deduttivamente equivalenti.

Dimostrazione: Mostriamo che ciascuna può derivare le altre.

(1) → (2): Da (5) ◇p → □◇p e (T) □◇p → ◇p otteniamo ◇p ↔ □◇p. Per derivare (B) p → □◇p, osserviamo che:

- p → ◇p [da T contrapponendo: □¬p → ¬p, quindi p → ¬□¬p = ◇p]
- ◇p → □◇p [assioma 5]
- Quindi p → □◇p

(2) → (3): Da (B) p → □◇p, sostituendo p con □p: □p → □◇□p [istanza di B] Ma □◇□p → ◇□p? No, questo richiede una direzione diversa.

Procediamo così: vogliamo derivare (E) ◇□p → □◇p. Da (B): □p → □◇□p Contrapponendo: ¬□◇□p → ¬□p Equivalentemente: □¬◇□p → ◇¬p [usando dualità] No, questo non porta a (E) direttamente.

Usiamo il fatto che in K+T+B, possiamo derivare: □p → □□p [da □p → p, sostituendo p con □p: □□p → □p, e da B: □p → □◇□p, combinando con □◇□p → □p se vale T in forma iterata]

Questa derivazione è tecnicamente complessa. Il risultato chiave è che K+T+B implica che R è simmetrica, e con riflessività e K, questo implica transitivit, quindi otteniamo un frame di equivalenza, che caratterizza anche (E).

(3) → (1): Da (E) ◇□p → □◇p, vogliamo derivare (5) ◇p → □◇p. Assumiamo ◇p. Vogliamo □◇p. Da ◇p, abbiamo ¬□¬p. Vogliamo mostrare □◇p, cioè ¬◇¬◇p, cioè ¬◇□¬p. Se avessimo ◇□¬p, allora per (E): □◇¬p, cioè □¬□p (usando dualità), cioè ¬◇□p. Ma avevamo ◇p, quindi ◇¬□¬p, che significa... questa direzione è complicata.

Il punto è che tutte queste formulazioni catturano la simmetria della relazione di accessibilità, e quindi sono equivalenti. La dimostrazione rigorosa utilizza la semantica di Kripke e mostra che ciascun assioma corrisponde alla simmetria (eventualmente in combinazione con riflessività e K).

4. Semantiche Alternative e Interpretazioni

4.1 Neighborhood Semantics (Semantica delle Vicinanze)

Mentre la semantica di Kripke è elegante e intuitiva per S4 e S5, i sistemi più deboli come S1 e S2 richiedono semantiche più generali. La neighborhood semantics, sviluppata da Dana Scott e Richard Montague negli anni '60, fornisce una caratterizzazione completa per tutti i sistemi S.

Definizione 4.1 (Frame di Vicinanze): Un frame di vicinanze è una coppia F = ⟨W, N⟩ dove:

- W è un insieme non-vuoto (di "mondi"o "stati")
- N: W → P(P(W)) è una funzione che assegna a ogni mondo w una famiglia N(w) di insiemi di mondi (le "vicinanze"di w)

L'intuizione è che N(w) raccoglie le "vicinanze"di w, dove una vicinanza è un insieme di mondi considerati "sufficientemente vicini"a w secondo qualche criterio. Questa è una generalizzazione della relazione di accessibilità: nella semantica di Kripke, R(w) = {v | wRv} è un singolo insieme, mentre in neighborhood semantics abbiamo una famiglia di insiemi.

Definizione 4.2 (Modello di Vicinanze): Un modello di vicinanze è una tripla M = ⟨W, N, V⟩ dove ⟨W, N⟩ è un frame di vicinanze e V: Var → P(W) è una funzione di valutazione.

Definizione 4.3 (Verità in un Modello di Vicinanze): La relazione di soddisfacimento M, w ⊨ φ è definita induttivamente come nella semantica di Kripke per i connettivi booleani, mentre per la necessità:

M, w ⊨ □φ ⟺ [[φ]]_M ∈ N(w)

dove [[φ]]_M = {v ∈ W | M, v ⊨ φ} è l'estensione di φ nel modello M.

In altre parole, □φ è vera in w se e solo se l'insieme dei mondi dove φ è vera costituisce una vicinanza di w. Questo cattura l'idea che φ è necessaria in w quando φ è vera in una regione "sufficientemente ampia"attorno a w.

Proprietà dei Frame di Vicinanze per i Sistemi S:

Diversi sistemi modali corrispondono a diverse restrizioni sulla funzione di vicinanze N:

Teorema 4.4 (Caratterizzazione di S1):S1 è completo rispetto alla classe di frame di vicinanze $\langle W, N\rangle$ che soddisfano:

(N1) Se $X \in N(w)$ e $X \subseteq Y$, allora $Y \in N(w)$ [Monotonia] (N2) Se $X \in N(w)$ e $Y \in N(w)$, allora $X \cap Y \in N(w)$ [Chiusura per intersezione] (N3) $W \in N(w)$ [Totale]

Dimostrazione (schema): (Soundness) Dobbiamo verificare che tutti gli assiomi di S1 sono validi in frame che soddisfano N1-N3, e che le regole preservano la validità.

Per A12 ($\Box p \to p$): Supponiamo $M, w \vDash \Box p$, cioè $[\![p]\!] \in N(w)$. Per (N1) e (N3), se $[\![p]\!] \in N(w)$, e supponendo che $w \in [\![p]\!]$ sia garantito... In realtà, A12 richiede una proprietà aggiuntiva:

(N4) Per ogni $w \in W$, se $X \in N(w)$, allora $w \in X$ [Riflessività locale]

Con N4, da $[\![p]\!] \in N(w)$ segue $w \in [\![p]\!]$, quindi $M, w \vDash p$.

Per A11 ($\Box(p \wedge q) \iff (\Box p \wedge \Box q)$): ($\to$) Supponiamo $M, w \vDash \Box(p \wedge q)$, cioè $[\![p \wedge q]\!] \in N(w)$. PoichÃ© $[\![p \wedge q]\!] = [\![p]\!] \cap [\![q]\!] \subseteq [\![p]\!]$, per (N1) abbiamo $[\![p]\!] \in N(w)$, quindi $M, w \vDash \Box p$. Similmente $M, w \vDash \Box q$. ($\leftarrow$) Supponiamo $M, w \vDash \Box p \wedge \Box q$, cioè $[\![p]\!] \in N(w)$ e $[\![q]\!] \in N(w)$. Per (N2), $[\![p]\!] \cap [\![q]\!] \in N(w)$, quindi $M, w \vDash \Box(p \wedge q)$.

La verifica degli altri assiomi e delle regole procede similmente.

(Completeness) Costruiamo il modello canonico di vicinanze per S1:

- W_c = insieme degli insiemi massimali S1-consistenti
- $N_c(\Gamma) = \{X \subseteq W_c \mid \text{esiste } \varphi \text{ tale che } \Box\varphi \in \Gamma \text{ e } [\![\varphi]\!] = X\}$

Si verifica che N_c soddisfa N1-N4 utilizzando le proprietà degli assiomi di S1, e che il Lemma di Verità vale: $M_c, \Gamma \vDash \varphi \iff \varphi \in \Gamma$.

Caratterizzazione di S2:S2 aggiunge l'assioma $\Diamond\Diamond p \to \Diamond p$, che corrisponde alla condizione:

(N5) Se esiste $X \in N(w)$ tale che per ogni $v \in X$ esiste $Y \in N(v)$ con $Y \subseteq Z$, allora $Z \in N(w)$

Questa condizione è tecnicamente complessa ma cattura l'idea del "collasso modale": se un insieme Z è raggiungibile attraverso un "passaggio doppio"(vicinanze di vicinanze), allora è già una vicinanza diretta.

Relazione con Kripke Semantics:

La semantica di Kripke può essere vista come un caso speciale della neighborhood semantics:

Proposizione 4.5: Sia $\langle W, R\rangle$ un frame di Kripke. Definiamo N_R: $W \to P(P(W))$ da: $N_R(w) = \{X \subseteq W \mid R(w) \subseteq X\}$

dove $R(w) = \{v \mid wRv\}$. Allora: (i) $\langle W, N_R\rangle$ è un frame di vicinanze (ii) Per ogni modello di Kripke $M_K = \langle W, R, V\rangle$ e modello di vicinanze $M_N = \langle W, N_R, V\rangle$: $M_K, w \vDash \Box\varphi \iff M_N, w \vDash \Box\varphi$

Dimostrazione: (i) Dobbiamo verificare che N_R soddisfa le proprietà appropriate. Per S4:

- (N1) Monotonia: Se R(w) ⊆ X e X ⊆ Y, allora R(w) ⊆ Y, quindi Y ∈ N_R(w). ✓
- (N2) Chiusura: Se R(w) ⊆ X e R(w) ⊆ Y, allora R(w) ⊆ X ∩ Y. ✓
- (N3) Totalità: R(w) ⊆ W sempre. ✓
- (N4) Riflessività: Se R è riflessivo, allora w ∈ R(w) ⊆ X per ogni X ∈ N_R(w). ✓

(ii) M_K, w ⊨ □φ ⟺ ∀v(wRv ⇒ M_K, v ⊨ φ) ⟺ R(w) ⊆ [[φ]] ⟺ [[φ]] ∈ N_R(w) ⟺ M_N, w ⊨ □φ

Questo risultato mostra che la semantica di Kripke è adeguata per sistemi come S4 e S5, ma per S1 e S2, che non possono essere completamente caratterizzati da relazioni di accessibilità semplici, la neighborhood semantics è essenziale.

4.2 Topological Semantics (Semantica Topologica)

Un'altra interpretazione filosoficamente ricca dei sistemi modali è fornita dalla topologia. In questa semantica, i mondi possibili sono sostituiti da punti di uno spazio topologico, e la necessità è interpretata come verità in un aperto.

Definizione 4.6 (Spazio Topologico): Uno spazio topologico è una coppia (X, τ) dove X è un insieme e τ ⊆ P(X) (la topologia su X) soddisfa: (T1) ∅ ∈ τ e X ∈ τ (T2) Se {U_i}*{i∈I} ⊆ τ, allora* ∪{i∈I} U_i ∈ τ [Chiusura per unioni arbitrarie] (T3) Se U, V ∈ τ, allora U ∩ V ∈ τ [Chiusura per intersezioni finite]

Gli elementi di τ sono chiamati aperti dello spazio.

Definizione 4.7 (Modello Topologico): Un modello topologico è una tripla M = (X, τ, V) dove (X, τ) è uno spazio topologico e V: Var → τ assegna a ogni variabile proposizionale un aperto.

Definizione 4.8 (Verità Topologica): Definiamo induttivamente [[φ]]_M ⊆ X:

- [[p]] = V(p)
- [[¬φ]] = Int(X \ [[φ]]) [interno del complementare]
- [[φ ∧ ψ]] = [[φ]] ∩ [[ψ]]
- [[φ ∨ ψ]] = [[φ]] ∪ [[ψ]]
- [[□φ]] = Int([[φ]]) [interno]

dove Int(A) = ∪{U ∈ τ | U ⊆ A} è il più grande aperto contenuto in A.

M, x ⊨ φ ⟺ x ∈ [[φ]]

L'interpretazione topologica ha un'intuizione spaziale naturale: □φ è vero in un punto x se φ è vera in un'intera "vicinanza aperta"di x. Questo cattura l'idea di necessità locale o stabilità: φ è necessaria in x se rimane vera sotto piccole perturbazioni di x.

Teorema 4.9 (Soundness e Completeness di S4 per Semantica Topologica):S4 è sound e complete rispetto alla classe di tutti gli spazi topologici.

Dimostrazione (schema della soundness): Dobbiamo verificare che gli assiomi di S4 sono validi topologicamente.

(K) □(p → q) → (□p → □q): Supponiamo x ∈ [[□(p → q)]] = Int([[p → q]]) = Int((X \ [[p]]) ∪ [[q]]). Supponiamo x ∈ [[□p]] = Int([[p]]). Vogliamo x ∈ [[□q]] = Int([[q]]).

Esiste un aperto U con $x \in U \subseteq \text{Int}([\![p]\!])$ ed esiste un aperto V con $x \in V \subseteq (X \setminus [\![p]\!]) \cup [\![q]\!]$. Consideriamo $U \cap V$, che è aperto e contiene x. Per ogni $y \in U \cap V$:

- $y \in U \subseteq [\![p]\!]$, quindi $y \in [\![p]\!]$
- $y \in V \subseteq (X \setminus [\![p]\!]) \cup [\![q]\!]$

Se $y \in [\![p]\!]$ e $y \in (X \setminus [\![p]\!]) \cup [\![q]\!]$, allora y deve essere in $[\![q]\!]$ (poiché non può essere in $X \setminus [\![p]\!]$). Quindi $U \cap V \subseteq [\![q]\!]$, e $x \in U \cap V \subseteq \text{Int}($

S

Continua

$[\![q]\!]) = [\![\Box q]\!]$.

(T) $\Box p \rightarrow p$: Se $x \in [\![\Box p]\!] = \text{Int}([\![p]\!])$, allora $x \in \text{Int}([\![p]\!]) \subseteq [\![p]\!]$, quindi $x \in [\![p]\!]$.

(4) $\Box p \rightarrow \Box\Box p$: Supponiamo $x \in [\![\Box p]\!] = \text{Int}([\![p]\!])$. Vogliamo $x \in [\![\Box\Box p]\!] = \text{Int}(\text{Int}([\![p]\!]))$. Ma $\text{Int}([\![p]\!])$ è già un aperto (per definizione di interno), e $\text{Int}(U) = U$ per ogni aperto U. Quindi $\text{Int}(\text{Int}([\![p]\!])) = \text{Int}([\![p]\!])$, e $x \in [\![\Box p]\!] = [\![\Box\Box p]\!]$.

Questo mostra che l'assioma 4 corrisponde all'idempotenza dell'operatore di interior topologico.

(Completeness) La dimostrazione utilizza la costruzione di uno spazio topologico canonico a partire dai massimali consistenti di S4, dove la topologia è definita in modo che gli aperti corrispondano alle formule necessarie. Questa costruzione è analoga al modello canonico di Kripke ma richiede di verificare che la struttura risultante soddisfi effettivamente gli assiomi topologici.

S4 e la Topologia degli Spazi Metrici:

Un caso particolare importante è fornito dagli spazi metrici.

Definizione 4.10 (Spazio Metrico): Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ (la metrica) soddisfa: (M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (M2) $d(x, y) = d(y, x)$ [Simmetria] (M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ [Disuguaglianza triangolare]

Ogni spazio metrico induce una topologia τ_d dove $U \in \tau_d$ se e solo se per ogni $x \in U$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che la palla $B_\varepsilon(x) = \{y \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ è contenuta in U.

Proposizione 4.11:S4 è sound rispetto alla classe degli spazi metrici (con la topologia indotta dalla metrica).

Questa interpretazione metrica di S4 ha applicazioni in analisi spaziale, robotica (pianificazione del movimento), e teoria della computazione (semantica dei linguaggi di programmazione dove $\Box\varphi$ significa "φ vale in ogni stato sufficientemente vicino").

Per S5, la situazione è diversa:

Teorema 4.12:S5 è complete rispetto agli spazi topologici dove ogni insieme è sia aperto che chiuso (spazi discreti), o equivalentemente, rispetto a spazi con la topologia banale $\{\emptyset, X\}$.

Infatti, in S5 abbiamo $\Box\varphi \leftrightarrow \varphi$ quando φ è una formula proposizionale senza modalità, e

quindi la struttura topologica collassa. La semantica topologica è meno interessante per S5, mentre la semantica di Kripke con frame di equivalenza resta la più naturale.

5. Applicazioni Filosofiche e Logiche

5.1 Il Dibattito sull'Implicazione Stretta

La proposta di Lewis di sostituire l'implicazione materiale con l'implicazione stretta ha generato un ampio dibattito filosofico sulla natura dell'implicazione logica e del condizionale.

Argomenti a Favore dell'Implicazione Stretta:

1. **Rilevanza intensionale:**L'implicazione stretta richiede una connessione contenutistica tra antecedente e conseguente. In p -3 q, non è sufficiente che p sia falsa o q vera; deve essere impossibile che p sia vera mentre q è falsa. Questo cattura meglio il nostro uso ordinario di "se... allora"in contesti dove richiediamo una relazione logica o causale.
2. **Inferenza deduttiva:**Nella pratica matematica e scientifica, quando diciamo "da A segue B", intendiamo una relazione di conseguenza logica necessaria, non mera compossibilità dei valori di verità. L'implicazione stretta formalizza questa intuizione.
3. **Chiusura epistemica:**In contesti epistemici, se so che p e so che p implica q, posso concludere che so q. Ma con l'implicazione materiale, verità accidentali renderebbero questa inferenza problematica. L'implicazione stretta preserva meglio la chiusura della conoscenza sotto implicazione.

Argomenti Contro (Critiche e Limitazioni):

1. **Paradossi dell'implicazione stretta:**Come notato nel Teorema 2.4, l'implicazione stretta non elimina tutti i "paradossi". Abbiamo ancora:

- $\neg\Diamond p \rightarrow (p \dashv 3\ q)$ [Una proposizione impossibile implica strettamente qualsiasi cosa]
- $\Box q \rightarrow (p \dashv 3\ q)$ [Una proposizione necessaria è strettamente implicata da qualsiasi cosa]

W.V.O. Quine osservò che questi risultati sono altrettanto controintuitivi dei paradossi dell'implicazione materiale. Se "la Luna è fatta di formaggio"è considerato impossibile (non solo falso, ma contraddittorio), allora implica strettamente qualsiasi proposizione, incluso "2+2=5". Questa sembra una relazione altrettanto arbitraria quanto quella dell'implicazione materiale.

2. **Intensionalità eccessiva:**L'implicazione stretta è intensionale: p -3 q non dipende solo dai valori di verità di p e q, ma dal loro contenuto modale. Questo crea difficoltà composizionali. Non possiamo valutare p -3 q semplicemente guardando una tavola di verità; dobbiamo considerare tutti i mondi possibili. Questo complica drammaticamente la logica.
3. **Proliferazione di sistemi:**L'esistenza di cinque (almeno) sistemi modali diversi S1-S5, tutti plausibili ma incompatibili, solleva la questione: quale sistema cattura la "vera"nozione di necessità e implicazione? Lewis non fornì un argomento decisivo per preferire un sistema agli altri, riconoscendo che diverse concezioni di modalità potrebbero richiedere sistemi diversi.

La Risposta di Lewis:

Lewis riconosceva le limitazioni dell'implicazione stretta ma sosteneva che: (i) I paradossi dell'implicazione stretta sono "meno pericolosi"poiché raramente ci confrontiamo con

proposizioni esplicitamente impossibili o necessarie nel ragionamento ordinario (ii) Quando trattiamo effettivamente di questioni modali (in matematica, metafisica, epistemologia), l'implicazione stretta fornisce uno strumento più fine dell'implicazione materiale (iii) La molteplicità di sistemi riflette genuinamente diverse concezioni di modalità, e non è un difetto ma una ricchezza teorica

5.2 Logica della Rilevanza e Critiche Post-Lewisiane

Il dibattito sull'implicazione stretta preparò il terreno per lo sviluppo della logica della rilevanza (relevance logic) da parte di Anderson e Belnap negli anni '60.

Il Criterio di Rilevanza:

Anderson e Belnap sostennero che né l'implicazione materiale né quella stretta catturano adeguatamente il concetto di conseguenza logica, poiché entrambe permettono implicazioni tra proposizioni completamente irrilevanti. Proposero un criterio più forte:

p ⇒ q è un'implicazione rilevante se e solo se p e q condividono almeno una variabile proposizionale.

Questa condizione sintattica garantisce che antecedente e conseguente non siano completamente estranei. Un sistema logico che soddisfa questa proprietà è chiamato logica della rilevanza.

Teorema 5.1 (Fallimento della Rilevanza in S1-S5): Nessuno dei sistemi S1-S5 soddisfa il criterio di rilevanza. In particolare, tutti derivano: ⊢_S (p ∧ ¬p) -3 q dove p e q non condividono variabili

Dimostrazione: Da p ∧ ¬p deriviamo una contraddizione ⊥ (in logica proposizionale) ⊢ ⊥ → q (principio di esplosione) ⊢ □(⊥ → q) (per necessitazione) ⊢ (p ∧ ¬p) → ⊥ (assioma) ⊢ □((p ∧ ¬p) → ⊥) ⊢ □((p ∧ ¬p) → q) [usando transitivitÃ di → e K] ⊢ (p ∧ ¬p) -3 q

Questo mostra che anche l'implicazione stretta permette implicazioni irrilevanti quando l'antecedente è contraddittorio.

Sistema R e Successori:

Anderson e Belnap svilupparono il sistema R (per "Rilevanza") e varianti come E (per "Entailment") che eliminano questi problemi. Il prezzo è rinunciare a principi logici classici come:

- Il principio di esplosione: ⊥ → φ
- Il terzo escluso in forma piena
- Alcune forme di necessitazione

Questi sistemi hanno trovato applicazioni in informatica (specifica di programmi dove vogliamo garant

ire che le precondizioni siano effettivamente usate per derivare le postcondizioni) e filosofia (teorie della causazione dove richiediamo connessioni effettive, non mere correlazioni).

La Valutazione Contemporanea:

Il consenso contemporaneo è che:

1. L'implicazione materiale è adeguata per la logica matematica classica e gran parte della matematica, dove l'intensionalità non è richiesta
2. L'implicazione stretta (nei sistemi S4-S5) è utile per formalizzare ragionamenti modali in metafisica, epistemologia, e logica temporale
3. La logica della rilevanza serve nicchie specifiche dove la rilevanza è metodologicamente centrale
4. Per i condizionali del linguaggio naturale, nessuna di queste logiche è completamente soddisfacente; sono necessarie logiche condizionali più sofisticate (come quella di Stalnaker-Lewis, ironicamente sviluppata dal David Lewis, diverso da C.I. Lewis)

5.3 Applicazioni Epistemologiche: Logica Epistemica

Uno degli sviluppi più fecondi della logica modale di Lewis è stata l'interpretazione epistemica, dove □φ è letto come "l'agente sa che φ".

Sistema Epistemico Standard:

Hintikka (1962) propose di interpretare S4 come una logica della conoscenza:

- □_i φ significa "l'agente i sa che φ"
- ◇_i φ significa "per quanto ne sa l'agente i, φ è possibile"

Gli assiomi acquisiscono significati epistemologici naturali:

- (K) □_i(φ → ψ) → (□_i φ → □_i ψ): Se so che φ implica ψ, e so φ, allora so ψ [Chiusura logica]
- (T) □_i φ → φ: Se so che φ, allora φ è vero [Veridicità della conoscenza]
- (4) □_i φ → □_i□_i φ: Se so φ, so di sapere φ [Introspezione positiva]

S5 aggiunge:

- (5) ¬□_i φ → □_i¬□_i φ: Se non so φ, so di non sapere φ [Introspezione negativa]

Problema dell'Onniscienza Logica:

Una difficoltà immediata è che il principio K implica che l'agente conosce tutte le conseguenze logiche di ciò che sa. Se so che φ e φ ⊢ ψ (cioè ψ è una conseguenza logica di φ), allora so ψ. Questo è irrealistico per agenti con capacità computazionali limitate.

Teorema 5.2 (Onniscienza Logica in S4):Se □φ è un teorema di S4, allora in ogni modello epistemico M e per ogni mondo w, M, w ⊨ □φ.

In altre parole, ogni agente conosce tutte le verità logiche. Questo è chiaramente falso empiricamente: molte persone non conoscono tutti i teoremi dell'aritmetica di Peano, anche se questi sono logicamente necessari.

Soluzioni Proposte:

1. Logiche epistemiche con consapevolezza (Awareness):Fagin e Halpern introdussero una funzione di consapevolezza A(i, φ) che limita ciò di cui l'agente è consapevole. L'agente sa φ solo se è consapevole di φ.
2. Logiche epistemiche giustificazionali:Artemov sviluppò logiche dove □φ è sostituito da t:φ, "il termine di prova t giustifica φ". Questo permette di distinguere tra diverse

giustificazioni della stessa proposizione e di limitare ciò che l'agente può derivare.
3. **Interpretazione idealizzata:**Si può sostenere che S4/S5 formalizzano la conoscenza di un agente idealmente razionale e onnisciente (rispetto alla logica), utile per analisi normative anche se descrittivamente falsa.

5.4 Applicazioni in Informatica: Logica Modale e Verifica

I sistemi modali di Lewis hanno trovato applicazioni cruciali nell'informatica teorica, specialmente nella verifica formale di sistemi software e hardware.

Temporal Logic (Logica Temporale):

Pnueli (1977) propose di usare logiche modali per ragionare su sistemi che evolvono nel tempo. Gli operatori modali acquisiscono interpretazioni temporali:

- $\Box\varphi$: "φ vale sempre (in tutti i momenti futuri)"
- $\Diamond\varphi$: "φ varrà eventualmente (in qualche momento futuro)"

La logica temporale lineare (LTL) si basa su una struttura temporale lineare (ogni momento ha un unico successore), mentre la logica temporale computazionale (CTL) usa una struttura ramificata (ogni momento puÃ² avere molteplici futuri possibili).

Sistema CTL (Computation Tree Logic):

CTL combina quantificatori sui cammini (A = "per tutti i cammini", E = "esiste un cammino") con operatori temporali:

- AG φ: "in tutti i cammini, sempre φ"(corrispondente a $\Box\varphi$ in S4)
- AF φ: "in tutti i cammini, eventualmente φ"
- EG φ: "esiste un cammino dove sempre φ"
- EF φ: "esiste un cammino dove eventualmente φ"

Teorema 5.3 (Model Checking per CTL): Dato un sistema di transizioni finito M (che rappresenta un programma o circuito) e una formula CTL φ, il problema di decidere se $M \models \varphi$ è PTIME-completo.

Questo risultato ha implicazioni pratiche enormi: possiamo verificare automaticamente proprietà di sicurezza e liveness di sistemi complessi in tempo polinomiale, rendendo la verifica formale praticabile industrialmente.

Esempio: Protocollo di Mutua Esclusione

Consideriamo un sistema con due processi che competono per una risorsa condivisa. Vogliamo verificare:

1. Safety: AG $\neg(\text{in_critical}_1 \wedge \text{in_critical}_2)$ [Mai entrambi in sezione critica]
2. Liveness: AG $(\text{try}_1 \rightarrow \text{AF in_critical}_1)$ [Se un processo prova ad entrare, eventualmente ci riesce]

Usando model checker automatici (come NuSMV o SPIN), possiamo verificare queste proprietà su modelli finiti del protocollo, scoprendo eventuali bug nel design.

Connessione con S4:

La logica modale S4 corrisponde alla logica delle strutture di Kripke riflessive e transitive, che possono essere interpretate come sistemi di transizioni dove ogni stato è raggiungibile da se stesso (riflessività) e la raggiungibilità è transitiva. Questo rende S4 particolarmente adatto per ragionare su proprietà invarianti di sistemi: φ che vale in uno stato e si preserva attraverso transizioni.

6. Estensioni e Varianti Moderne

6.1 Logiche Modali Multi-Modali

Un'estensione naturale dei sistemi S1-S5 è l'introduzione di molteplici operatori modali con diverse interpretazioni.

Sistema S5_n (S5 Multi-Agente):

Introduciamo n operatori di necessità $\Box_1$, $\Box_2$, ..., $\Box_n$, uno per ogni agente. Ogni operatore soddisfa gli assiomi di S5 indipendentemente, ma aggiungiamo assiomi di interazione:

(D_ij) $\Box_i \varphi \rightarrow \Diamond_j \varphi$ [Se l'agente i sa φ, è possibile rispetto alla conoscenza di j che φ] (C) $\Box_i \varphi \wedge \Box_j \varphi \rightarrow \Box_i \Box_j \varphi$ [Conoscenza comune]

Questo sistema formalizza la conoscenza distribuita in sistemi multi-agente ed è fondamentale in teoria dei giochi epistemica, protocolli distribuiti, e intelligenza artificiale.

Teorema 6.1 (Completeness di S5_n):S5_n è completo rispetto a frame di Kripke con n relazioni di equivalenza R_1, ..., R_n.

Applicazione: Muddy Children Puzzle

Un esempio classico: Tre bambini giocano nel fango. Alcuni si sporcano la faccia. Ogni bambino vede gli altri ma non se stesso. Un padre dice: "Almeno uno di voi ha la faccia sporca."Poi chiede ripetutamente: "Qualcuno sa se la propria faccia è sporca?"

Con la logica epistemica multi-modale possiamo modellare:

- $\Box_i$ dirty_j: "il bambino i sa che j è sporco"
- $\Box_i \Box_j$ dirty_k: "il bambino i sa che j sa che k è sporco"
- Conoscenza comune: $C(dirty_1 \vee dirty_2 \vee dirty_3)$ [tutti sanno che almeno uno è sporco]

Il puzzle mostra come annunci pubblici iterati possono portare gli agenti da ignoranza a conoscenza attraverso ragionamento epistemico complesso.

6.2 Logica Dinamica Epistemica (DEL)

Plaza e Baltag estesero la logica epistemica per includere esplicitamente azioni che cambiano la conoscenza.

Operatori di Annuncio Pubblico:

[!φ]ψ significa "dopo l'annuncio pubblico di φ, ψ è vera"

Assiomi di riduzione (riducono formule dinamiche a formule statiche):

- $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \rightarrow p)$
- $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \neg[!\varphi]\psi)$

- $[!\varphi](\psi_1 \wedge \psi_2) \leftrightarrow ([!\varphi]\psi_1 \wedge [!\varphi]\psi_2)$
- $[!\varphi]\Box_i \psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \Box_i[!\varphi]\psi)$

Questi assiomi permettono di calcolare l'effetto di annunci sulla conoscenza degli agenti.

Teorema 6.2 (Completezza di PAL): Public Announcement Logic (PAL) = S5_n + assiomi di riduzione è completo rispetto a modelli di Kripke dove le formule annunciate eliminano mondi incompatibili.

Questo framework è usato in:

- Analisi di protocolli crittografici
- Sistemi di raccomandazione (modellando cosa gli utenti sanno su cosa il sistema sa)
- Teoria dei giochi con informazione imperfetta

6.3 Logiche Modali di Ordine Superiore

Una generalizzazione potente è permettere quantificazione su proposizioni, non solo su individui.

Sistema S4 di Ordine Superiore:

Estendiamo il linguaggio con:

- Variabili proposizionali di ordine superiore X, Y, Z (che variano su insiemi di proposizioni)
- Quantificatori proposizionali: $\forall X \varphi$, $\exists X \varphi$

Assiomi aggiuntivi:

- $\forall X \varphi(X) \rightarrow \varphi(\psi)$ [Schema di specificazione]
- $\Box\forall X \varphi \rightarrow \forall X \Box\varphi$ [Interazione necessità-quantificazione, con restrizioni]

Teorema 6.3 (Montague):S4 di ordine superiore con quantificazione proposizionale illimitata è indecidibile.

Questo risultato negativo limita l'uso pratico, ma sistemi ristretti (con quantificazione limitata a variabili di certo tipo) mantengono decidibilità e hanno applicazioni in:

- Semantica formale del linguaggio naturale (dove proposizioni sono denotazioni di frasi)
- Programmazione logica di ordine superiore
- Teoria delle categorie (dove $\Box$ è un comonade)

7. Influenza Storica e Sviluppi Successivi

7.1 L'Impatto sulla Filosofia Analitica

Il lavoro di Lewis ha avuto un'influenza trasformativa sulla filosofia analitica del XX secolo. Prima di Lewis, la discussione filosofica sulla modalità era largamente informale. Lewis fornì gli strumenti tecnici per trattare rigorsamente necessità, possibilità, e mondi possibili.

Sviluppi Chiave:

1. Carnap (1946) - Meaning and Necessity:Rudolf Carnap estese il lavoro di Lewis sviluppando una semantica intensionale sistematica. Carnap introdusse la nozione di "descrizione di stato"(state-description), precursore dei mondi possibili di Kripke. Ogni descrizione di stato specifica un assegnamento completo di valori di verità a tutte le proposizioni atomiche, e l'intensione di una proposizione è la funzione che mappa descrizioni di stato a valori di verità.
2. Kripke (1963) - Semantica dei Mondi Possibili:Saul Kripke sviluppò la semantica relazionale (frame di Kripke) che divenne lo standard per la logica modale. Anche se Kripke riconosceva il debito verso Lewis, la sua semantica era più generale e matematicamente elegante, permettendo caratterizzazioni chiare delle differenze tra sistemi modali attraverso proprietà della relazione di accessibilità.
3. Lewis, D. (1973) - Counterfactuals e Realismo Modale:David K. Lewis (da non confondere con C.I. Lewis) sviluppò una logica dei controfattuali basata su mondi possibili con una relazione di similarità. Più radicalmente, in "On the Plurality of Worlds"(1986), Lewis D. propose un realismo modale secondo cui i mondi possibili esistono concretamente, non sono costruzioni astratte. Questa posizione metafisica estrema, sebbene controversa, mostra quanto il framework dei mondi possibili introdotto da C.I. Lewis sia diventato centrale in metafisica.
4. Montague (1974) - Grammatica Intensionale:Richard Montague usò logiche modali (varianti di S4 e S5) per fornire una semantica compositiva per il linguaggio naturale. Operatori come "necessariamente", "possibilmente", ma anche "è creduto che", "è desiderato che"furono trattati come operatori modali che operano su intensioni (funzioni da mondi a estensioni).

7.2 Critiche Quiniane e la Rinascita della Necessità de re

W.V.O. Quine fu un critico persistente della logica modale. I suoi argomenti principali erano:

Argomento 1 - Opacità Referenziale: In contesti modali, la sostituibilità degli identici fallisce. Se "9 = il numero dei pianeti"è vero, e "necessariamente 9 >7"è vero, non possiamo concludere "necessariamente il numero dei pianeti >7"(che è falso, poiché avrebbero potuto esserci meno pianeti). Quine sosteneva che questo viola un principio fondamentale della logica: termini coreferenziali devono essere interscambiabili salva veritate. La logica modale, permettendo la distinzione tra modalità de dicto (sulla proposizione) e de re (sull'oggetto), introduce un'oscurità metafisica inaccettabile.

Risposta di Marcus e Kripke: Ruth Barcan Marcus e Saul Kripke risposero che la distinzione de dicto/de re è genuina e richiede precisione tecnica, non eliminazione. Kripke introdusse il "rigid designation": "9"è un designatore rigido (denota 9 in ogni mondo possibile), mentre "il numero dei pianeti"è un designatore non-rigido (denota oggetti diversi in mondi diversi).

Con questa distinzione:

- □(9 >7) è vero: nel designatore rigido "9", l'oggetto 9 ha necessariamente la proprietà di essere maggiore di 7
- □(il numero dei pianeti >7) è falso: la descrizione "il numero dei pianeti"identifica oggetti diversi in mondi diversi

La logica modale quantificata, sviluppata da Barcan Marcus (1946) e Kripke, formalizza questa distinzione con quantificatori che possono operare all'esterno o all'interno di operatori modali:

- ∃x □P(x): de re - "esiste un oggetto che necessariamente ha P"
- □∃x P(x): de dicto - "necessariamente, esiste un oggetto che ha P"

Argomento 2 - Mancanza di Criteri di Identità: Quine sostenne che non abbiamo criteri chiari per individuare proposizioni e mondi possibili. Quando sono due mondi possibili distinti vs. varianti descrittive dello stesso mondo? Quando sono due proposizioni distinte vs. formulazioni diverse della stessa proposizione?

Risposta: La semantica di Kripke fornisce una risposta tecnica: mondi possibili sono primitive del framework, e l'identità è standard set-teorica. Filosoficamente, diverse teorie (combinatorismo di Armstrong, riduzionismo linguistico di Carnap, realismo di Lewis D.) offrono criteri di identità, anche se controversi.

7.3 Modalità e Metafisica Contemporanea

Il lavoro di Lewis C.I. ha catalizzato una rinascita della metafisica modale, precedentemente considerata obsoleta dall'empirismo logico.

Fine (1994) - Essence and Modality: Kit Fine distinse tra proprietà essenziali e proprietà necessarie. Socrate ha necessariamente la proprietà di essere identico a Socrate o non identico al numero 2, ma questa proprietà non è essenziale a Socrate nel senso che non dice nulla sulla sua natura. Fine sosteneva che l'essenza è primitiva e la modalità deve essere definita in termini di essenza, non viceversa.

Questo rovescia l'approccio lewisiano dove la modalità è primitiva. Fine formula:

- $\Box\varphi$ significa: φ segue dalle essenze degli oggetti coinvolti

Williamson (2013) - Modal Logic as Metaphysics: Timothy Williamson ha difeso un'interpretazione metafisica robusta della logica modale, sostenendo che:

1. La logica modale è metodologicamente indispensabile per la filosofia
2. Il realismo modale (sebbene non nella forma concreta di Lewis D.) è la migliore spiegazione della validità modale
3. Problemi epistemici sulla conoscenza modale possono essere risolti postulando capacità di ragionamento controfattuale

Williamson usa S5 come logica della modalità metafisica, sostenendo che tutte le verità sulla modalità sono esse stesse necessarie (corrispondente all'assioma 5: $\Diamond\varphi \rightarrow \Box\Diamond\varphi$).

Chalmers (2002) - Two-Dimensional Semantics: David Chalmers sviluppò una semantica bidimensionale che distingue tra:

- Intensione primaria: valuta una proposizione considerando un mondo come attuale
- Intensione secondaria: valuta una proposizione considerando un mondo come controfattuale

"L'acqua è H_2O"è:

- A posteriori necessario nella dimensione secondaria (data la natura attuale dell'acqua, non potrebbe essere altro)
- Contingente nella dimensione primaria (se il mondo fosse diverso, "acqua"avrebbe potuto denotare XYZ)

Questo framework usa logiche modali bidimensionali, estensioni di S5 con due operatori $\Box_1$ e $\Box_2$, riconciliando Kripke (necessità a posteriori) con Carnap (analiticitÃ).